SÉLECTION D'EXERCICES D'ORAUX POUR CLASSE ENTIÈRE

EXERCICE 1. *On pose* $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2(3-x)}$.

(1) Décomposer $f(x)$ *en éléments simples et en déduire la primitive* G *de* f *définie sur l'intervalle* $]-1;3[$ *telle que* $G(1)=0$.

(2) Déterminer le développement en série entière en 0 de la fonction f *et précisez le rayon de convergence.*

(3) Déduire de ce développement la valeur de $G^{(3)}(0)$.

EXERCICE 2. *Soit* $N \in \mathbb{N}^*$.

Soit $p \in]0,1[$. *On pose* $q = 1-p$.
On considère N *variables aléatoires* $X_1, X_2, \cdots, X_N$ *définies sur un même espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, *mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre* p.

(1) Soit $i \in [\![1,N]\!]$. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$.
Déterminer $P(X_i \leqslant n)$, *puis* $P(X_i > n)$.

(2) On considère la variable aléatoire Y *définie par* $Y = \underset{1\leqslant i\leqslant N}{\mathrm{Min}}(X_i)$.
c'est à dire $\forall \omega \in \Omega$, $Y(\omega) = \mathrm{Min}(X_1(\omega), \cdots, X_n(\omega))$, Min *désignant* « *le plus petit élément de* ».

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *Calculer* $P(Y > n)$. *En déduire* $P(Y \leqslant n)$, *puis* $P(Y = n)$.

(b) Reconnaître la loi de Y. *En déduire* $E(Y)$.

EXERCICE 3. *On considère la série de fonctions de terme général* u_n *définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\quad u_n(x) = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\ .$$

On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\ \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right]$.

(1) Démontrer que S *est dérivable sur* $[0,1]$.

(2) Calculez $S'(1)$.

EXERCICE 4. *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) *Démontrer que* A *est diagonalisable de quatre manières :*
   (a) *sans calcul,*
   (b) *en calculant directement le déterminant det*$(\lambda I_3 - A)$, *où* I_3 *est la matrice identité d'ordre 3, et en déterminant les sous-espaces propres,*
   (c) *en utilisant le rang de la matrice,*
   (d) *en calculant* A^2.

(2) *On suppose que* A *est la matrice d'un endomorphisme* u *d'un espace euclidien dans une base orthonormée.*

   Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de u *est diagonale.*

EXERCICE 5. (1) *Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.*

(2) *Démontrer que la fonction* $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt)\, dt$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$.

(3) (a) *Trouver une équation différentielle linéaire* (E) *d'ordre* 1 *dont* f *est solution.*
   (b) *Résoudre* (E) .

EXERCICE 6. *Montrer que* $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ *est un espace préhilbertien avec* $\langle f \mid g \rangle = \displaystyle\int_0^1 fg$, *en déduire une majoration de* $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x} e^{-x}\, dx$.

EXERCICE 7. *(le genre progressif niveau Sup) (festina lentes)*

On pose $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n - 1 + \sqrt{\ldots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}}$ *pour* $n \geqslant 1$ *(*$u_0 = 0$*).*

a) *Minorer* u_n *et montrer que* $u_n \to +\infty$.
b) *Exprimer* u_{n+1} *en fonction de* u_n.
c) *En déduire que* $u_n \leqslant n$.
d) *En déduire que* $u_n = o(n)$.
e) *En déduire – enfin – un équivalent de* u_n.

EXERCICE 8. *On pose* $u_n(x) = \dfrac{\arctan nx}{n^2}$.

a) *Domaine de définition de* $f = \sum_{n \geqslant 1} u_n$ *?*

b) *Domaine de continuité de* f *?*

c) *Dérivabilité de* f *sur* $\mathbb{R}^*$ *?*

d) ** Équivalent de* f *en 0 ? [Réponse :* $-x \ln x$ *; encadrer* $t - \frac{t^3}{3} \leqslant \arctan t \leqslant t$ *pour* $t \geqslant 0$ *puis découper la somme en* $p = \lfloor 1/x \rfloor$*]*

EXERCICE 9. *Soit* $\lambda \in]0, +\infty[$.

Soit X *une variable aléatoire discrète à valeurs dans* $\mathbb{N}^*$*. On suppose que* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = \dfrac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$.

(1) *Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle* R *définie par* $R(x) = \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$.

(2) *Calculer* λ.

(3) *Prouver que* X *admet une espérance, puis la calculer.*

(4) X *admet-elle une variance ? Justifier.*

EXERCICE 10. *Étudier la suite* (u_n) *définie par* $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in [0, 1]$ *et* u_n *est racine de* $x^n + x\sqrt{n} - 1 = 0$*. Montrer que* $u_n \to 0$ *puis étudier la convergence de* $(\sum u_n)$.

EXERCICE 11. *Trouver les solutions de* $f'(x) = f(x) + f(-x)$ *[commencer par déterminer leur classe]. Généralisation : trouver les solutions DSE de* $f'(x) = f(x) + f(\alpha x)$ *pour un* $\alpha \in]-1, 1[$ *fixé.*

EXERCICE 12. *Énoncer quatre théorèmes différents ou méthodes permettant de prouver qu'une partie d'un espace vectoriel normé est fermée et pour chacun d'eux, donner un exemple concret d'utilisation dans* $\mathbb{R}^2$.

Les théorèmes utilisés pourront être énoncés oralement à travers les exemples choisis.

Remarques

(1) *On utilisera au moins une fois des suites.*

(2) *On pourra utiliser au plus une fois le passage au complémentaire*

(3) *Ne pas utiliser le fait que* $\mathbb{R}^2$ *et l'ensemble vide sont des parties ouvertes et fermées.*

EXERCICE 13. *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $n \geqslant 2$*. On pose* $z = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

(1) *On suppose* $k \in [\![1, n-1]\!]$.
Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.

(2) *On pose* $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left| z^k - 1 \right|$*. Montrer que* $S = \dfrac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.

EXERCICE 14. X *et* Y *sont deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans* $\mathbb{N}$. *Elles suivent la même loi définie par :* $\forall\, k \in \mathbb{N},\ P(X=k) = P(Y=k) = pq^k$ *où* $p \in]0,1[$ *et* $q = 1-p$.
On considère alors les variables U *et* V *définies par* $U = \mathrm{Sup}(X,Y)$ *et* $V = \mathrm{Inf}(X,Y)$.

(1) *Déterminer la loi du couple* (U,V).
(2) *Expliciter les lois marginales de* U *et de* V.
(3) U *et* V *sont-elles indépendantes ? Était-ce « évident » ?*

EXERCICE 15. *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$.
On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ *par :*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2-xy} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}.$$

(1) *Prouver que* $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2-xy \geqslant \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$.
(2) (a) *Quel est le domaine de définition de* f *?*
 (b) *Déterminer* α *pour que* f *soit continue sur* $\mathbb{R}^2$.
(3) *Dans cette question, on suppose que* $\alpha = 0$.
 (a) *Justifier l'existence de* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *sur* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *et les calculer.*
 (b) *Justifier l'existence de* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ *et donner leur valeur.*
 (c) f *est-elle de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}^2$ *?*

EXERCICE 16. *Soit un entier* $n \geqslant 1$. *On considère la matrice carrée d'ordre* n *à coefficients réels :*

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour $n \geqslant 1$, *on désigne par* D_n *le déterminant de* A_n.

(1) *Démontrer que* $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.
(2) *Déterminer* D_n *en fonction de* n.
(3) *Justifier que la matrice* A *est diagonalisable. Le réel* 0 *est-il valeur propre de* A *?*

EXERCICE 17. *Domaine de définition* D_f *de* $f(x,y) = xy\sqrt{1-x^2-2y^2}$ *? Montrer que la « courbe »* $f=0$ *est réunion de deux segments et d'une conique à préciser.*
Trouver les extrema de f *sur* D_f *(on se ramènera à travailler sur l'ouvert* $\Omega = \{(x>0, y>0, x^2+2y^2<1)\}$*).*