SÉLECTION D'EXERCICES D'ORAUX

EXERCICE 1. *(1) On considère deux suites numériques* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telles que* $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.

Démontrer que u_n *et* v_n *sont de même signe à partir d'un certain rang.*

(2) Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de : $u_n = \operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{n}\right) - \tan\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

EXERCICE 2. *On pose* $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2(3-x)}$.

(1) Décomposer $f(x)$ *en éléments simples et en déduire la primitive* G *de* f *définie sur l'intervalle* $]-1;3[$ *telle que* $G(1) = 0$.

(2) Déterminer le développement en série entière en 0 de la fonction f *et précisez le rayon de convergence.*

(3) Déduire de ce développement la valeur de $G^{(3)}(0)$.

EXERCICE 3. *(1) On considère la série de terme général* $u_n = \dfrac{1}{n\,(\ln n)^\alpha}$ *où* $n \geqslant 2$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) ***Cas*** $\alpha \leqslant \mathbf{0}$

En utilisant une minoration très simple de u_n, *démontrer que la série diverge.*

(b) ***Cas*** $\alpha > \mathbf{0}$

Étudier la nature de la série.

Indication *: On pourra utiliser la fonction* f *définie par* $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.

(2) Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} \frac{\left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.

EXERCICE 4. *(1) Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de nombres réels positifs. Montrer que :*

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n \textit{ et } \sum v_n \textit{ sont de même nature.}$$

(2) Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(i-1)\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{(\sqrt{n+3}-1)\ln n}$ *(où* $i^2 = -1$*).*

EXERCICE 5. *On considère une suite croissante de réels* $(x_n)_n$ *telle que* $x_n \to +\infty$. *Montrer que la série* $\left(\sum 1 - \frac{x_n}{x_{n+1}}\right)$ *est divergente.*
On pourra penser à un DL de la fonction $\ln$ *au voisinage de 1.*

EXERCICE 6. *(1) Étudier la convergence simple sur* $\mathbb{R}$ *de la série de fonctions* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

(2) Étudier la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$ *de la série de fonctions* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

EXERCICE 7. *(1) Soit* X *un ensemble,* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* X *dans* $\mathbb{C}$ *et* g *une fonction de* X *dans* $\mathbb{C}$.
Donner la définition de la convergence uniforme sur X *de la suite de fonctions* (g_n) *vers la fonction* g.

(2) On pose $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1} e^{-nx^2}$.

(a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
(b) La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge-t-elle uniformément sur* $[0, +\infty[$ *?*
(c) Soit $a > 0$. *La suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge-t-elle uniformément sur* $[a; +\infty[$ *?*
(d) La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge-t-elle uniformément sur* $]0, +\infty[$ *?*

EXERCICE 8. *(1) Soit* (g_n) *une suite de fonctions de* X *dans* $\mathbb{C}$, X *désignant un ensemble non vide quelconque.*
On suppose que, pout tout $n \in \mathbb{N}$, g_n *est bornée et que la suite* (g_n) *converge uniformément sur* X *vers* g.
Démontrer que la fonction g *est bornée.*

(2) On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *de fonctions définies sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si} \quad |x| \leqslant 1/n \\ 1/x & \text{si} \quad |x| > 1/n \end{cases}$$

Prouver que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge simplement sur* $\mathbb{R}$.
La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$ *?*

EXERCICE 9. *On considère la série de fonctions de terme général* u_n *définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0, 1],\quad u_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}.$$

On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right]$.

(1) Démontrer que S *est dérivable sur* $[0, 1]$.
(2) Calculez $S'(1)$.

EXERCICE 10. *Soit* $A \subset \mathbb{C}$ *et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* A *dans* $\mathbb{C}$.

(1) Démontrer l'implication :

$$\Big(\text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } A\Big)$$
$$\Downarrow$$
$$\Big(\text{la suite de fonctions } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers 0 sur } A\Big)$$

(2) On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [0;+\infty[,\ f_n(x) = nx^2e^{-x\sqrt{n}}$.
Prouver que $\sum f_n$ *converge simplement sur* $[0;+\infty[$.
$\sum f_n$ *converge-t-elle uniformément sur* $[0;+\infty[$ *? Justifier.*

EXERCICE 11. *(1) Déterminer le rayon de convergence de la série entière* $\sum \dfrac{x^n}{(2n)!}$.

On pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.

(2) Donner le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ *et précisez le rayon de convergence.*

(3) (a) Déterminer $S(x)$.

(b) On considère la fonction f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$f(0) = 1,\quad f(x) = \mathrm{ch}\sqrt{x} \text{ pour } x > 0,\quad f(x) = \cos\sqrt{-x} \text{ pour } x < 0 .$$

Démontrer que f *est de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$.

EXERCICE 12. *(1) Démontrer que, pour tout entier* n, *la fonction* $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^ne^{-t}}$ *est intégrable sur* $[0,+\infty[$.

(2) On pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2+t^ne^{-t}}$. *Calculer* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

EXERCICE 13. *Pour tout* $n \geqslant 1$, *on pose* $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt$.

(1) Justifier que I_n *est bien définie.*

(2) Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *et déterminer sa limite.*

(3) La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^nI_n$ *est-elle convergente ?*

(4) Si c'est le cas, calculer sa somme.

EXERCICE 14. *(1) Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.*

(2) Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,dt$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$.

(3) (a) Trouver une équation différentielle linéaire (E) *d'ordre* 1 *dont* f *est solution.*

(b) Résoudre (E) .

EXERCICE 15. *Soit l'équation différentielle :* $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

(1) *Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière à l'origine.*
Déterminer la somme des séries entières obtenues.

(2) *Est-ce que toutes les solutions de* $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$ *sur* $]0;1[$ *sont développables en série entière à l'origine ?*

(3) *Chercher une solution non DSE à l'origine.*

EXERCICE 16. E *et* F *désignent deux espaces vectoriels normés.*

(1) *Soient* f *une application de* E *dans* F *et* a *un point de* E.
On considère les propositions suivantes :

P1: f *est continue en* a.

P2: *Pour toute suite* (x_n) *d'éléments de* E *telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.

Prouver que les propositions P1 et P2 sont équivalentes.

(2) *Soit* A *une partie dense d'un sous-espace vectoriel normé* E, *et soient* f *et* g *deux applications continues de* E *dans* F.
Démontrer que si, pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$, *alors* $f = g$.

(3) Application *Montrer que la série* $\sum \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ *converge uniformément sur* $[0,1]$. *Soit* $f(x)$ *sa somme. Justifier que* f *est continue sur* $[0,1]$, *puis que* f *est dérivable sur* $[0,1[$ *et en déduire que* $f = \arctan$ *sur* $[0,1[$. *Que peut-on en conclure sur* $f(1)$ *?*

EXERCICE 17. *On considère, pour tout entier naturel* n *non nul, la fonction* f_n *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^4x^4}$.

(1) (a) *Prouver que* $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ *converge simplement sur* $\mathbb{R}$.

On pose alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

(b) *Soit* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *avec* $0 < a < b$.
$\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ *converge-t-elle normalement sur* $[a,b]$ *? sur* $[a,+\infty[$ *?*

(c) $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ *converge-t-elle normalement sur* $[0,+\infty[$ *?*

(2) *Prouver que* f *est continue sur* $\mathbb{R}^*$.

(3) *Déterminer* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

EXERCICE 18. (1) *Déterminer une primitive de* $x \longmapsto \cos^4 x$.

(2) *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *l'équation différentielle :* $y'' + y = \cos^3 x$ *en utilisant la méthode de variation des constantes.*

EXERCICE 19. *Énoncer quatre théorèmes différents ou méthodes permettant de prouver qu'une partie d'un espace vectoriel normé est fermée et pour chacun d'eux, donner un exemple concret d'utilisation dans $\mathbb{R}^2$.*
Les théorèmes utilisés pourront être énoncés oralement à travers les exemples choisis.
Remarques :

(1) *On utilisera au moins une fois des suites.*
(2) *On pourra utiliser au plus une fois le passage au complémentaire*
(3) *Ne pas utiliser le fait que $\mathbb{R}^2$ et l'ensemble vide sont des parties ouvertes et fermées.*

EXERCICE 20. (1) *Soit f une fonction continue sur $[0,1]$.*

(a) *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quel est le sens géométrique de la somme de Riemann $R_n(f) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$?*
Illustrer par un dessin soigné.

(b) *Démontrer, lorsque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, que $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(f) = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.*
(on pourra préalablement montrer qu'il existe une constante M telle que $\left|f(x) - f(\frac{k}{n})\right| \leqslant M|x - \frac{k}{n}|$ pour tous $x, \frac{k}{n} \in [0,1]$)

(2) *Déterminer la limite de la suite (x_n) définie par $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{3n^2 + k^2}$.*

EXERCICE 21. *Montrer pour $x \to 0^+$ que*

$$\int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t}\,dt + \ln x \to C^{te}.$$

EXERCICE 22. *On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$.*

On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

(1) *Étudier la convergence simple de cette série.*
On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.

(2) (a) *Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D.*
(b) *La fonction S est-elle continue sur D ?*

EXERCICE 23. *On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.*

$\forall\, P \in E$, *on pose* $N_1(P) = \sum_{i=0}^{n} |a_i|$ *et* $N_\infty(P) = \underset{0 \leqslant i \leqslant n}{\mathrm{Max}} |a_i|$ *où* $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ *avec* $n \geqslant \deg P$.

(1) (a) Démontrer que N_1 et N_∞ sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.

(b) Démontrer que tout ouvert pour la norme N_∞ est un ouvert pour la norme N_1.

(c) Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

(2) On note $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué par les polynômes de degré inférieur ou égal à k. On note N_1' la restriction de N_1 à $\mathbb{R}_k[X]$ et N_∞' la restriction de N_∞ à $\mathbb{R}_k[X]$.

Les normes N_1' et N_∞' sont-elles équivalentes ?

EXERCICE 24. *On note ℓ^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.*

(1) Démontrer que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

(2) (a) Démontrez que pour $x = (x_n) \in \ell^2$ et $y = (y_n) \in \ell^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge.

On pose alors $(x|y) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.

(b) Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire dans ℓ^2.

(3) On suppose que ℓ^2 est muni de ce produit scalaire et de la norme associée.

Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $x = (x_n) \in \ell^2$, on pose $\varphi(x) = x_p$.

Démontrer que φ est une application linéaire et continue de ℓ^2 dans $\mathbb{C}$.

(4) On considère l'ensemble F des suites réelles presque nulles (c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes)

Déterminer $F^\perp$. (au sens de $(\,|\,)$).

Comparer F et $\left(F^\perp\right)^\perp$.

EXERCICE 25. *Soit* $\sum a_n$ *une série absolument convergente à termes complexes. On pose* $M = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0, +\infty[\,,\ f_n(t) = \dfrac{a_n t^n}{n!} e^{-t}$.

(1) (a) *Justifier que la suite* (a_n) *est bornée.*

(b) *Justifier que la série de fonctions* $\sum f_n$ *converge simplement sur* $[0, +\infty[$.

On admettra, pour la suite de l'exercice, que $f : t \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ *est continue sur* $[0, +\infty[$.

(2) (a) *Justifier que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *la fonction* $g_n : t \mapsto t^n e^{-t}$ *est intégrable sur* $[0, +\infty[$ *et calculer* $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.

En déduire la convergence et la valeur de $\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\, dt$.

(b) *Prouver que* $\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n t^n}{n!} e^{-t} \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

EXERCICE 26. *On pose* $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$.

1 *Montrer que* Γ *est bien définie pour* $x > 0$.

2 *Montrer que* Γ *est continue sur* $D =]0, +\infty[$.

3 *Montrer que* Γ *est* $\mathcal{C}^1$ *sur* $D =]0, +\infty[$ *et exprimer sa dérivée sous forme d'une intégrale.*

Exprimer sans démonstration Γ'' *sous forme intégrale.*

4 *Justifier que l'espace vectoriel* L^2_D *des fonctions* f *continues de* D *dans* $\mathbb{R}$, *de carré sommable (i.e.* $\int_D f^2$ *converge), est un espace vectoriel, puis que* L^2_D *muni de* $\langle f \,|\, g \rangle = \int_D fg$ *est un espace préhilbertien.*

5 *En déduire l'inégalité*

$$\left(\int_0^{\infty} t^{x-1} (\ln t)\, e^{-t}\, dt \right)^2 \leqslant \int_0^{\infty} t^{x-1} (\ln t)^2 e^{-t}\, dt \times \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

Que peut-on en conclure sur la fonction $\ln(\Gamma)$ *?*

EXERCICE 27. *(1) Montrer que la série* $\sum \dfrac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$ *converge.*

On se propose de calculer la somme de cette série.

(2) Donner le développement en série entière en 0 de $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ *en précisant le rayon de convergence.*
Remarque : dans l'expression du développement, on utilisera la notation factorielle.

(3) En déduire le développement en série entière en 0 de $x \longmapsto \operatorname{Arcsin} x$ *ainsi que son rayon de convergence.*

(4) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$.

****

****

EXERCICE 28. *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ *et* f *l'endomorphisme de* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *défini par :* $f(M) = AM$.

(1) *Déterminer Ker*f .

(2) f *est-il surjectif ?*

(3) *Trouver une base de Ker* f *et une base de Im* f.

EXERCICE 29. $E = \mathbb{R}_n[X], u(P) = P - P'$. *Montrer que* u *est un endomorphisme de* E. *Quels sont ses éléments propres ?* u *est-il un isomorphisme ? Quelle est sa matrice dans la base canonique ?*
$Q \in E$ *étant donnée, trouver* $P \in E$ *tel que* $u(P) = Q$ *(indication : dériver* $n+1$ *fois).*

EXERCICE 30. *Soit* E *un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.
Soient f *et* g *deux endomorphismes de* E *tels que* $f \circ g = Id$.

(1) *Démontrer que Ker*$(g \circ f) =$ *Ker* f.

(2) *Démontrer que Im*$(g \circ f) =$ *Im* g.

(3) *Démontrer que* $E =$ *Ker*$f \oplus$ *Im* g.

EXERCICE 31. *Soit un entier* $n \geqslant 1$. *On considère la matrice carrée d'ordre* n *à coefficients réels :*

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour $n \geqslant 1$, *on désigne par* D_n *le déterminant de* A_n.

(1) *Démontrer que* $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.

(2) *Déterminer* D_n *en fonction de* n.

(3) *Justifier que la matrice* A *est diagonalisable. Le réel* 0 *est-il valeur propre de* A *?*

EXERCICE 32. *Soit la matrice* $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ *où* a, b, c *sont des réels.*
M *est-elle diagonalisable dans* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *?* M *est-elle diagonalisable dans* $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ *?*

EXERCICE 33. *Soit trois suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par* $u_0 = v_0 = 1$ *et* $w_0 = 0$, *et, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} = v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$ *On pose* $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. *On écrit* $X_{n+1} = AX_n$, *avec une matrice* A *bien choisie. On admet la relation* $X_n = A^n X_0$.

(1) *Déterminer* A^n.

(2) *Résolution ?*

EXERCICE 34. *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *où* a *est un réel.*

(1) *Déterminer le rang de* A.

(2) *Pour quelles valeurs de* a*, la matrice* A *est-elle diagonalisable ?*

EXERCICE 35. *On considère deux variables aléatoires* X *et* Y *sur un même espace probabilisé, on suppose que* $X(\Omega) = Y(\Omega) = [[1, n+1]]$ *et que, pour tout couple* $(i, j) \in [[1, n+1]]^2$, $\mathcal{P}(X = i, Y = j) = \lambda \binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}$*, où* λ *est une constante réelle.*

(1) *Montrer que* $\lambda = \dfrac{1}{4^n}$.

(2) *Déterminer les lois marginales de* X *et* Y.

(3) *Les variables* X *et* Y *sont-elles indépendantes ?*

(4) *À l'aide de la variable* $X - 1$*, déterminer l'espérance et la variance de* X.

(5) *Soit* $B \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ *la matrice définie par* $b_{i,j} = \mathcal{P}_{(X=j)}(Y = i)$.

   (a) *Calculer* B^2.

   (b) *La matrice* B *est-elle diagonalisable ? Déterminer la dimension des sous-espaces propres de* B.

EXERCICE 36. *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) *Démontrer que* A *est diagonalisable de quatre manières :*

   (a) *sans calcul,*

   (b) *en calculant directement le déterminant* $\det(\lambda I_3 - A)$*, où* I_3 *est la matrice identité d'ordre 3, et en déterminant les sous-espaces propres,*

   (c) *en utilisant le rang de la matrice,*

   (d) *en calculant* A^2.

(2) *On suppose que* A *est la matrice d'un endomorphisme* u *d'un espace euclidien dans une base orthonormée.*

   Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de u *est diagonale.*

EXERCICE 37. *Soit* p*, la projection vectorielle de* $\mathbb{R}^3$*, sur le plan* P *d'équation* $x + y + z = 0$*, parallèlement à la droite* D *d'équation* $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$.

(1) *Vérifier que* $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.

(2) *Soit* $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
Déterminer $p(u)$ *et donner la matrice de* p *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^3$.

(3) *Déterminer une base de* $\mathbb{R}^3$ *dans laquelle la matrice de* p *est diagonale.*

EXERCICE 38. *(1) On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Justifier sans calcul que A *est diagonalisable.*

(b) Déterminer les valeurs propres de A *puis une base de vecteurs propres associés.*

(2) On considère le système différentiel $\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}$, x, y, z *désignant trois fonctions de la variable* t, *dérivables sur* $\mathbb{R}$.

En utilisant la question 1. et en le justifiant, résoudre ce système.

EXERCICE 39. *Soit* E *l'espace vectoriel des applications continues et* 2π*-périodiques de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.

(1) Démontrer que $(f \mid g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\, g(t)\, dt$ *définit un produit scalaire sur* E.

(2) Soit F *le sous-espace vectoriel engendré par* $f : x \mapsto \cos x$ *et* $g : x \mapsto \cos(2x)$.

Déterminer le projeté orthogonal sur F *de la fonction* $u : x \mapsto \sin^2 x$.

EXERCICE 40. *Soit* E *un espace préhilbertien et* F *un sous-espace vectoriel de* E *de dimension finie* $n > 0$.

Redémontrer que pour tout $x \in E$, *il existe un élément unique* y_0 *de* F *tel que* $x - y_0$ *soit orthogonal à* F *et que la distance de* x *à* F *soit égale à* $\|x - y_0\|$.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *et* $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, *on pose* $(A \mid A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.

(1) Démontrer que $(\,.\,|\,.\,)$ *est un produit scalaire sur* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(2) Calculez la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ *au sous-espace vectoriel* F *des matrices triangulaires supérieures.*

EXERCICE 41. *Soit* u *et* v *deux endomorphismes d'un espace vectoriel* E.

(1) Soit λ *un réel non nul. Prouver que si* λ *est valeur propre de* $u \circ v$, *alors* λ *est valeur propre de* $v \circ u$.

(2) On considère sur $E = \mathbb{R}[X]$ *les endomorphismes* u *et* v *définis par* $u : P \longmapsto \displaystyle\int_1^X P$ *et* $v : P \longmapsto P'$.

Déterminer $\mathrm{Ker}(u \circ v)$ *et* $\mathrm{Ker}(v \circ u)$. *Le résultat de la question 1. reste-t-il vrai pour* $\lambda = 0$ *?*

(3) Si E *est de dimension finie, démontrer que le résultat de la première question reste vrai pour* $\lambda = 0$.

On pourra utiliser, avec démonstration, que 0 est valeur propre d'un endomorphisme w *de* E *(espace de dimension finie) si et seulement si* $\det w = 0$.

EXERCICE 42. *Montrer que* $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ *est un espace préhilbertien avec* $\langle f \mid g \rangle = \int_0^1 fg$, *en déduire une majoration de* $\int_0^1 \sqrt{x} e^{-x}\, dx$.

EXERCICE 43. *Soient* $a_0, a_1, \cdots, a_n$ $n+1$ *réels deux à deux distincts.*

(1) *À l'aide de l'application* $u : P \mapsto (P(a_0), P(a_1), \dots P(a_n))$, *montrer que si* $b_0, b_1, \cdots, b_n$ *sont* $n+1$ *réels quelconques, alors il existe un unique polynôme* P *vérifiant*

$$\deg P \leqslant n \text{ et } \forall i \in \{0, \cdots, n\} \; P(a_i) = b_i.$$

(2) *Soit* $k \in [\![0, \dots, n]\!]$.
Expliciter ce polynôme P, *que l'on notera* L_k, *lorsque :*

$$\forall i \in [\![0, \dots, n]\!] \quad b_i = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq k \\ 1 \text{ si } i = k \end{cases}$$

(3) *Prouver que* $\forall p \in [\![0, \dots, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p$.

EXERCICE 44. *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $n \geqslant 2$. *On pose* $z = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

(1) *On suppose* $k \in [\![1, n-1]\!]$.
Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.

(2) *On pose* $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left|z^k - 1\right|$. *Montrer que* $S = \dfrac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.

EXERCICE 45. *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(1) *Montrer que* A *n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.*

(2) *La matrice* A *est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?*

(3) *Déterminer, en justifiant, le polynôme minimal de* A.

(4) *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Déterminer le reste de la division euclidienne de* X^n *par* $(X-1)^2$ *et en déduire la valeur de* A^n.

EXERCICE 46. *On admet, dans cet exercice, que :* $\forall\, q \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k \geqslant q} \binom{k}{q} x^{k-q}$ *converge et* $\forall\, x \in]-1,1[$, $\sum\limits_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \dfrac{1}{(1-x)^{q+1}}$.

Soit $p \in]0,1[$ *et* $r \in \mathbb{N}^*$.

On dépose une bactérie dans une enceinte fermée à l'instant $t = 0$ *(le temps est exprimé en secondes).*
On envoie un rayon laser par seconde dans cette enceinte.
Le premier rayon laser est envoyé à l'instant $t = 1$.
La bactérie a la probabilité p *d'être touchée par le rayon laser.*
Les tirs de laser sont indépendants.
La bactérie ne meurt que lorsqu'elle a été touchée r *fois par le rayon laser.*
Soit X *la variable aléatoire égale à la durée de vie de la bactérie.*

(1) *Déterminer la loi de* X.

(2) *Prouver que* X *admet une espérance et la calculer.*

(3) *Par exemple par dérivation terme à terme justifiée, démontrer la propriété admise en préambule.*

EXERCICE 47. *Soit* $a \in]0,+\infty[$.

Soit (X,Y) *un couple de variables aléatoires à valeurs dans* $\mathbb{N}^2$ *dont la loi est donnée par :*

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2,\ P(X=j, Y=k) = \frac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{e\, j!\, k!}.$$

(1) *Déterminer les lois marginales de* X *et de* Y.
Les variables X *et* Y *sont-elles indépendantes ?*

(2) *Prouver que* $E\left[2^{X+Y}\right]$ *existe et la calculer.*

EXERCICE 48. *Soit* $\lambda \in]0, +\infty[$.

Soit X *une variable aléatoire discrète à valeurs dans* $\mathbb{N}^*$.
On suppose que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = n) = \dfrac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$.

(1) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle R *définie par*
$$R(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}.$$

(2) Calculer λ.

(3) Prouver que X *admet une espérance, puis la calculer.*

(4) X *admet-elle une variance ? Justifier.*

EXERCICE 49. ***Remarque*** *: les questions 1. et 2. sont indépendantes.*

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé.*

(1) (a) Soit X_1 *et* X_2 *deux variables aléatoires définies sur* $(\Omega, \mathcal{A})$.
On suppose que X_1 *et* X_2 *sont indépendantes et suivent une loi de Poisson, de paramètres respectifs* λ_1 *et* λ_2.
Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.

(b) En déduire l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$.

(2) Soit X *et* Y *deux variables aléatoires définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On suppose que Y *suit une loi de Poisson de paramètre* λ.
On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ *et que* $\forall\ m \in \mathbb{N}$, *la loi conditionnelle de* X *sachant* $(Y = m)$ *est une loi binomiale de paramètre* (m, p).
Déterminer la loi de X.

EXERCICE 50. *Soit* $N \in \mathbb{N}^*$.

Soit $p \in]0, 1[$. *On pose* $q = 1 - p$.
On considère N *variables aléatoires* $X_1, X_2, \cdots, X_N$ *définies sur un même espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, *mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre* p.

(1) Soit $i \in [\![1, N]\!]$. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$.
Déterminer $P(X_i \leqslant n)$, *puis* $P(X_i > n)$.

(2) On considère la variable aléatoire Y *définie par* $Y = \underset{1 \leqslant i \leqslant N}{\mathrm{Min}}(X_i)$.
c'est à dire $\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \mathrm{Min}\,(X_1(\omega), \cdots, X_n(\omega))$, Min *désignant « le plus petit élément de ».*

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *Calculer* $P(Y > n)$. *En déduire* $P(Y \leqslant n)$, *puis* $P(Y = n)$.

(b) Reconnaître la loi de Y. *En déduire* $E(Y)$.

EXERCICE 51. X *et* Y *sont deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans* $\mathbb{N}$.

Elles suivent la même loi définie par : $\forall\ k \in \mathbb{N},\ P(X = k) = P(Y = k) = pq^k$ *où* $p \in]0, 1[$ *et* $q = 1 - p$.
On considère alors les variables U *et* V *définies par* $U = \mathrm{Sup}(X, Y)$ *et* $V = \mathrm{Inf}(X, Y)$.

(1) Déterminer la loi du couple (U, V).

(2) Expliciter les lois marginales de U *et de* V.

(3) U *et* V *sont-elles indépendantes ?*

EXERCICE 52. *On admet, dans cet exercice, que :*

$$\forall\, q \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k \geqslant q} \binom{k}{q} x^{k-q} \text{ converge et } \forall\, x \in]-1,1[\,,\ \sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \frac{1}{(1-x)^{q+1}}.$$

Soit $p \in]-1,1[$.
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé.*
Soit X *et* Y *deux variables aléatoires définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *et à valeurs dans* $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi de probabilité du couple (X, Y) *est donnée par :*

$$P((X = k) \cap (Y = n)) = \begin{cases} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n \text{ si } k \leqslant n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

(1) *Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.*

(2) *Déterminer la loi de* Y.

(3) *Prouver que* $1 + Y$ *suit une loi géométrique.*

(4) *Déterminer l'espérance de* Y.

(5) *Déterminer la loi de* X.

EXERCICE 53. *Soit* $\lambda \in]0, +\infty[$.
Soit X *une variable aléatoire discrète à valeurs dans* $\mathbb{N}^*$.
On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X = n) = \dfrac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$.

(1) *Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle* R *définie par* $R(x) = \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$.

(2) *Calculer* λ.

(3) *Prouver que* X *admet une espérance, puis la calculer.*

(4) X *admet-elle une variance ? Justifier.*

EXERCICE 54. *On étudie divers modes de convergence d'une suite de fonctions* $f_n : x \mapsto a_n \cos nx + b_n \sin nx$.

(1) *Montrer que* $(f_n) \to 0$ *uniformément* $\iff$ $a_n \to 0$ *et* $b_n \to 0$.

(2) *Montrer que* $\int_0^\pi f_n^2 \to 0 \iff a_n \to 0$ *et* $b_n \to 0$.

(3) *On suppose que* $f_n \to 0$ *simplement sur* $\mathbb{R}$. *Montrer que* $a_n \to 0$. *Dans la suite de l'exercice on cherche à prouver que* $b_n \to 0$, *sous l'hypothèse que la suite de fonctions* $(b_n \sin nt)$ *tend simplement vers 0.*

(4) *Dans cette question on suppose* b_n *bornée. Justifier que* $\int_0^\pi b_n^2 \sin^2 nt \, dt \to 0$ *et en déduire que* $b_n \to 0$.

(5) *On ne suppose plus* b_n *bornée. On pose* $b'_n = \mathrm{Inf}(|b_n|, 1)$. *Montrer que* b'_n *est bornée et que* $(b'_n \sin nt)$ *tend simplement vers 0. Appliquer la question précédente et conclure.*

EXERCICE 55. *On considère une matrice* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et l'endomorphisme associé* u *de* $\mathbb{R}^n$ *muni de son produit scalaire canonique. Montrer qu'un hyperplan* H *de* $\mathbb{R}^n$ *est stable par* u *(i.e.* $\forall X \in H, AX \in H$*) si et seulement si la droite* $\Delta = H^\perp$ *est stable par* ${}^tA$. *Comment qualifier un vecteur directeur de* Δ *?*

EXERCICE 56. *On considère une fonction continue* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. *Calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 n t^n f(t)\,dt$,

1°) en utilisant le théorème de WEIERSTRASS *(*$\varepsilon > 0$ *étant fixé, introduire un polynôme* P *tel que* $\|f - P\|_\infty \leqslant \varepsilon$*) ;*
2°) par un habile changement de variable.

EXERCICE 57. *On pose* $A = \dfrac{1}{21}\begin{pmatrix} 11 & -16 & 8 \\ -16 & -13 & -4 \\ 8 & -4 & -19 \end{pmatrix}$. *Reconnaître la transformation géométrique associée à* A*, et * trouver les matrices* B *orthogonales telles que* $B^2 = A$.

EXERCICE 58. *On considère la courbe* (C) *d'équation* $\sqrt{x}+\sqrt{y} = 1$. *À quelle condition deux tangentes à* (C) *aux points d'abscisse* x_0, x_1 *sont-elles orthogonales ? Quel est le lieu de leur intersection ?*

EXERCICE 59. *On pose* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Trouver le polynôme minimal de A*, en déduire* A^n*. Donner une autre méthode.*

EXERCICE 60. *Montrer que la fonction* $\Phi : (x,y) \mapsto \dfrac{\sin x - \sin y}{x - y}$ *se prolonge à une fonction* $\mathcal{C}^\infty$ *sur tout le plan* $\mathbb{R}^2$ *[on pourra, soit chercher une expression intégrale de* f*, soit utiliser le sinus cardinal]. préciser le lieu* $\Phi = 0$*, chercher les extrema de* Φ *sur le plan.*

EXERCICE 61. *(1) On suppose que la fonction* F *tend vers* ℓ *en* $+\infty$.

Montrer que $\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^n F \to \ell$ *quand* $n \to +\infty$.

(2) Soit f *une fonction intégrable sur* $\mathbb{R}_+$*, montrer que* $\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^n t\,f(t)\,dt \to 0$ *quand* $n \to +\infty$.

EXERCICE 62. *Etude de la série de terme général* $u_n = \cos\Big(\pi n^4 (\ln \dfrac{n}{n-1})^3\Big)$.

EXERCICE 63. *Soit* p *un nombre premier. Montrer que pour* $1 \leqslant k \leqslant p-1$,

$$k!(p-k)! \text{ divise } p \times (p-1)! \quad \text{et } k!(p-k)! \wedge p = 1.$$

En déduire que p *divise le coefficient binomial* $\binom{p}{k}$.
On se place dans un corps (commutatif) k *de caractéristique* p *:* $1+1+\ldots 1$ *(*p *fois)* $= 0$.
Montrer que pour tout couple $(x,y) \in k^2, (x+y)^p = x^p + y^p$. *Que peut-on en déduire sur l'application* $\Phi : x \mapsto x^p$ *? Montrer que l'ensemble de ses points fixes a* p *éléments et que c'est un corps isomorphe à* $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ *(on l'appelle le sous-corps premier).*

EXERCICE 64. *DSE de* $e^{-x}\sin x$ *de plusieurs façons.*

EXERCICE 65. *Soit* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $M^3 - M^2 - 6M = 0$. *Que dire de* M *? Exprimer* $\exp(M)$ *comme un polynôme (relativement) simple en* M.
Même question si $M^3 - 3M^2 + 3M - I = 0$.

EXERCICE 66. *DSE de* $x \mapsto \ln(1+x+x^2)$ *(de plusieurs façons ?).*

EXERCICE 67. *Soit la fonction définie par* $f(x,y) = \dfrac{xy}{x+y-xy}$.

(1) *Montrer que* f *est définie sur* $[0,1]^2 \setminus \{(0,0)\}$ *et que* f *est prolongeable par continuité sur* $[0,1]^2$ *en une fonction* g.

(2) $\forall (x,y) \in [0,1]^2 \setminus \{(0,0)\}$, *calculer* $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)$. *Puis montrer que* g *n'est pas de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[0,1]^2$.

(3) *Montrer que* g *atteint un maximum sur* $[0,1]^2$ *et trouver ce maximum.*

EXERCICE 68. *Existence et calcul de l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}x$.

EXERCICE 69. *Montrer que les matrices qui commutent avec* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ *sont des polynômes en* A *de degré* $\leqslant 2$ *(réduire* A...*).*

EXERCICE 70. *Existence, calcul de* $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1} \mathrm{d}t$.

EXERCICE 71. $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *n'ont aucune valeur propre commune. Montrer que la matrice* $\chi_A(B)$ *est inversible.*

EXERCICE 72. *Soit* $\theta \in]0,\pi[$ *et* $f : x \mapsto \ln(1 - 2x\cos\theta + x^2)$.

(1) *Montrer que* f *est dérivable.*

(2) *Développer* f *en série entière.*

EXERCICE 73. (1) *Montrer que* u *n'est pas bijectif.*

(2) (a) *Montrer que* $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.

(b) *Montrer que* $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u^2 + \mathrm{id}_E)$.

(c) *Montrer que* $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u^2 + \mathrm{id}_E)$.

(3) *On suppose* $u \neq 0$. *Montrer que le rang de* u *vaut 2 et qu'il existe une base de* E *dans laquelle* u *est représenté par la matrice* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 74. *Sur la parabole d'équation* $y = x^2$ *on définit une suite de points* $M_n = (x_n, y_n = x_n^2)$ *par la donnée de* (x_0, y_0) *et, pour tout* $n \geqslant 0$ *on prend pour* M_{n+1} *le point où la normale en* M_n *recoupe la parabole.*
Trouver une relation entre x_{n+1} *et* x_n, *en déduire le comportement des séries* $\sum 1/x_n$ *et* $\sum (-1)^n/x_n$

EXERCICE 75. *On considère une matrice réelle antisymétrique :* $A = -{}^tA$. *Montrer que* A^2 *est symétrique et que ses valeurs propres sont toutes* $\leqslant 0$. *En déduire que* A *est diagonalisable dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, *et que ses valeurs propres sont toutes imaginaires pures.*

EXERCICE 76. $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \mathrm{rang}\, M = p \leqslant n$. *Montrer que* ${}^tM.M$ *est inversible.*

EXERCICE 77. *Les matrices complexes* $\begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *sont-elles semblables ?*

EXERCICE 78. *On définit une suite d'intégrale* (J_n) *par* $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^{n+1}}$ *($n \in \mathbb{N}$).*

(1) *Justifier l'existence de la suite.*

(2) *Calculer* J_0.

(3) *Trouver une relation entre* J_n *et* J_{n+1}.

(4) ** Montrer qu'il existe une constante* A *strictement positive telle que* $J_n \sim \frac{A}{n^{1/3}}$.

EXERCICE 79. *Déterminer les points critiques de* $(x,y) \mapsto xy(1-x-y)$.

Montrer que la série double des $\left(\frac{1}{pq(p+q-1)}\right)_{p\geqslant 1, q\geqslant 1}$ *est sommable, * calculer sa somme.*

EXERCICE 80. *Soit* $A \in Gl_n(\mathbb{R})$ *telle que* ${}^tA = A^2$.

Montrer que $A^3 = I$ *puis que* A *est orthogonale. Montrer que le noyau de* $A^2 + A + I_n$ *est de dimension paire. En déduire « les angles » de* A.

EXERCICE 81. *On pose* $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_1^e x(\ln x)^n\, dx$.

(1) *Calculer* I_0, I_1.

(2) *Montrer* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2I_n + nI_{n-1} = e^2$.

(3) *Montrer que* (I_n) *décroît.*

(4) *Montrer* $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{e^2}{n+3} \leqslant I_n \leqslant \frac{e^2}{n+2}$.

(5) *Déterminer les limites de* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(nI_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(6) *Quelle est la nature des séries de terme général* I_n *et* nI_n.

EXERCICE 82. *Montrer successivement*

$$\int_0^1 y^n \ln(1-y)\, dy = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}$$

$$\int_0^1 (1-\frac{x}{n})^n \ln(x)\, dx = -\frac{n}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} - \ln n\right)$$

$$\int_0^\infty e^{-t}\ln t\, dt = -\gamma$$

où $\gamma = \lim \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n$ *(constante d'Euler).*

Quelle propriété de la fonction $\Gamma : x \mapsto \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\, dt$ *avez-vous démontrée ?*

EXERCICE 83. *On considère une isométrie* $u \in O_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que toute valeur propre de u *vaut* ± 1.

b) soient E_1 *et* E_{-1} *les espaces propres de* u. *Montrer que* $F = (E_1 \oplus E_{-1})^\perp$ *est stable par* u.

c) On considère ensuite la restriction v *de* u *à* F. *Montrer que* v *est une isométrie dont le spectre est vide.*

d) En déduire que le polynôme minimal de v *est produit de trinômes irréductibles, puis que* v *possède un plan stable (si* $\mu_v(X) = \prod(X^2 + aX + b)$, *considérer un* $x \in \operatorname{Ker}(u^2 + au + b\,\mathrm{id})$ *).*

e) On revient au cas général. Montrer qu'il existe une BON dans laquelle la matrice de u *est diagonale par blocs 1x1 ou 2x2.*

EXERCICE 84. *On pose* $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^4}\,dx$. *Calculer* I_n *et sa limite.*

Étudier le mode de convergence de la suite $f_n : x \mapsto \dfrac{nx}{1+n^2x^4}$ *sur* $\mathbb{R}_+$.

EXERCICE 85. *Écrire, puis diagonaliser la matrice* A *dont le terme d'indices* (i,j) *est* ij^2.

EXERCICE 86. *On pose* $I_n = \displaystyle\int_0^\infty |\sin^n t| e^{-t}\,dt$. *Calculer la limite de* I_n.

Trouver une relation de récurrence entre I_n *et* I_{n-2}.

** Comparer* I_n/I_{n-2} *à* $n^{-\alpha}/(n-2)^{-\alpha}$ *pour un* α *adéquat, en déduire un équivalent de* I_n.

EXERCICE 87. *Soient* u, v *deux endomorphismes d'un ev de dimension finie* E. *En considérant un supplémentaire* G *dans* E *de* $\operatorname{Ker} u$, *montrer que*

$$|\operatorname{rang} u - \operatorname{rang} v| \leqslant \operatorname{rang}(u+v)$$

puis (en considérant $\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v$*) que*

$$\operatorname{rang}(u+v) \leqslant \operatorname{rang} u + \operatorname{rang} v$$

Donner deux exemples avec $\operatorname{rang}(u+v) = \operatorname{rang} u + \operatorname{rang} v$ *(resp.* $\operatorname{rang}(u+v) < \operatorname{rang} u + \operatorname{rang} v$*)*

EXERCICE 88. $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(nx)}{n^2}$. *Continuité, dérivabilité, limites de* f.

EXERCICE 89. *** On munit* $E = \mathbb{R}_n[X]$ *du produit scalaire* $\langle P \mid Q \rangle = \int_0^1 P \times Q$.

On définit $u : E \to E$ *par* $u(P)(X) = \int_0^1 (X+t)^n P(t)\,dt$.

a) Montrer que u *est un endomorphisme, bijectif, symétrique. Pour l'injectivité on pourra montrer que si* P *est élément du noyau, alors il est orthogonal à tous les éléments de la base canonique de* E.

b) Justifier l'existence d'une BON $(P_0 \ldots P_n)$ *de vecteurs propres de* u *et montrer qu'on a l'identité*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(x) P_k(y)$$

où les λ_k *sont les valeurs propres associées aux* P_k *(multiplier par un* $P(x), P \in E$ *et intégrer).*

c) En déduire (par intégration) la trace de u.

EXERCICE 90. *On considère* n *complexes non nuls, tous distincts,* $a_1 \ldots a_n$ *et on pose*

$P(x) = \det(A + xI)$, *où* $A = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_n \\ a_1 & \ldots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$.

Quel est le degré du polynôme P *? Calculer* $P(a_i)$, *décomposer la fraction* $P(x) / \prod_{i=1}^{n} (x - a_i)$ *et en déduire* $\det A$.

EXERCICE 91. *Montrer que* $I_n = \int_0^1 \ln(1+t^n)\,dt$ *tend vers 0, puis que c'est équivalent à* $\dfrac{\pi^2}{12n}$ *(on donne* $\sum \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$*).*

EXERCICE 92. *Soit* u *l'endomorphisme de* $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ *défini par* $u(M) = {}^tM$. *Calculer* $\det u$.

EXERCICE 93. *Étudier la suite* (u_n) *définie par* $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in [0,1]$ *et* u_n *est racine de* $x^n + x\sqrt{n} - 1 = 0$. *Montrer que* $u_n \to 0$ *puis étudier la convergence de* $(\sum u_n)$.

EXERCICE 94. *Étudier la suite définie par* $u_0 > 0, u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$. *Trouver un équivalent de* u_n *(indic : considérer* $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$*).*

EXERCICE 95. *On pose* $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. A *est-elle diagonalisable ? pourquoi ?*

Montrer que A *est semblable à* $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. *Calculer* A^n *pour* $n \in \mathbb{Z}$.

EXERCICE 96. *On pose* $u_n = \cos(\pi\sqrt{n^2+n+2})$. *Faire un développement de* $\pi\sqrt{n^2+n+2}$ *se terminant par* $O(\frac{1}{n^2})$. *Type de convergence de* $\sum u_n$ *?*

EXERCICE 97. *On considère trois suites vérifiant les relations de récurrence* $\begin{cases} a_{n+1} &= \frac{3}{4} b_n \\ b_{n+1} &= \frac{3}{4} a_n + c_n \\ c_{n+1} &= \frac{1}{4}(a_n + b_n) \end{cases}$.

En posant $X_n =$ *le vecteur de coordonnées* a_n, b_n, c_n, *trouver* A *telle que le système équivale à* $X_{n+1} = AX_n$. *Diagonaliser* A. *Montrer que* A *est semblable à la matrice* $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -3/4 \end{pmatrix}$. *Quelle est la limite de* B^n *quand* $n \to +\infty$ *?*

Trouver un polynôme P *tel que* $P(1) = 1, P(-1/4) = P(-3/4) = 0$ *et exprimer* $P(B)$. *En déduire la limite de* A^n, *puis la convergence des suites* $(a_n), (b_n), (c_n)$.

EXERCICE 98. $E = \mathbb{R}[X]$ *(on pourra commencer par* $\mathbb{R}_3[X]$*).*

On pose $\Phi(P)(X) = \dfrac{P(x) + P(1 - X)}{2}$.

Montrer que $\Phi \in \mathcal{L}(E)$, *calculer* $\Phi \circ \Phi$ *et donner les éléments caractéristiques de* Φ *(on pourra écrire la formule de* TAYLOR *pour les polynômes au voisinage de 1/2).*

EXERCICE 99. *On pose pour* $n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$. *Montrer que* f_n *est intégrable sur* $I = \mathbb{R}_+$ *et calculer* $\int_0^\infty f_n$. *Que vaut* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty f_n$ *?*

Montrer que $\sum f_n$ *converge simplement sur* I, *calculer sa somme* $S = \sum_{n=1}^\infty f_n$ *puis* $\int_0^\infty S$ *(on prouvera l'intégrabilité de* S *sur* I*).*

En déduire sans aucun calcul *la nature de la série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty |f_n|$.

EXERCICE 100. $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, *et* $A^3 = -A$. *Montrer que* A *est semblable à* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 101. *On pose* $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$.

1°) Equivalent simple de H_n *?*

2°) Convergence de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{H_n}{n(n+1)}$ *?*

3°) En revenant aux sommes partielles et en remarquant la valeur de $H_{n+1} - H_n$, *montrer que la somme de cette série est* $\pi^2/6$.

EXERCICE 102. *Existe-t-il une norme* $\| \ \|$ *sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *pour laquelle on ait toujours* $\|AB\| = \|BA\|$ *?*

EXERCICE 103. *On suppose que* $f \in \mathcal{L}(E)$ *vérifie* $f^2 = -\mathrm{id}$ *(*E *étant un ev réel de dimension* n*). Montrer que si* $(x_1, \dots x_p, f(x_1), \dots f(x_{p-1}))$ *est libre, alors* $(x_1, \dots x_p, f(x_1), \dots f(x_{p-1}), f(x_p))$ *l'est aussi.*

En déduire qu'il existe une base dans laquelle la matrice de f *est* $\begin{pmatrix} 0 & -I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$. *Que conclure sur* n *?*

EXERCICE 104. ** On définit une suite de fonctions de la variable réelle par*

$$f_0(x) = 1 \quad \textit{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, f_{n+1}(x) = \int_0^x \sqrt{f_n(t)}\,dt$$

Calculer f_1, f_2, f_3 *et montrer que de façon générale* $f_n(x) = p_n x^{\beta_n}$. *Préciser* β_n, *donner une relation entre les* p_n.

Vérifier que $-\ln p_n = \ln \beta_n + \dfrac{1}{2}\ln \beta_{n-1} + \dots$, *et calculer* $\lim \beta_n$.

En déduire que la suite (f_n) *converge simplement. Vers quoi ? Uniformément ? Où ?*

EXERCICE 105. ** Montrer qu'une des deux solutions de l'équation* $x^2 + x - a = 0$ *est une fonction DSE* $x(a)$ *du paramètre* a *pour* $|a| < 1/4$ *et qui s'annule en 0.*

Soit A *une matrice nilpotente (il existe un entier* $p > 0$ *tel que* $A^p = 0$*). Pourquoi toute « série entière en* A *», i.e.* $\sum \alpha_k A^k$, *est-elle convergente ?*

À l'aide de la première question, proposer une solution M *de l'équation* $M^2+M = A$, *et montrer que cette solution est nilpotente. Existe-t-il, par ailleurs, une autre solution, non nilpotente ?*

EXERCICE 106. *On pose* $\phi_n(t) = n^2(t^n - t^{n+1})$ *et* $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. *Limite simple de la suite* $\phi_n \times f$ *sur* $[0,1]$ *?*

Montrer que $\int_0^1 \phi_n \to 1$, *puis que* $\int_0^1 \phi_n \times f \to f(1)$.

Donner un contre-exemple au théorème de convergence dominée (quand justement l'hypothèse de domination n'est pas vérifiée).

EXERCICE 107. *Trouver tous les sev stables de l'endomorphisme réel (resp. complexe) associé à* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 108. *Trouver toutes les droites incluses dans la surface* $\mathcal{S} : x^3 + y^3 = a^2 z$ *(*$a > 0$*) (paramétrer une telle droite sous la forme* $M_0 + t\vec{u}, t \in \mathbb{R}, M_0 \in \mathcal{S}, \vec{u} \in \mathbb{R}^3$*).*

EXERCICE 109. *Calculer pour* $a > 1, b > 1$, $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln\left(\frac{a - \cos x}{b - \cos x}\right) dx$.

EXERCICE 110. *La matrice carrée* A *a des zéros partout, sauf sur la diagonale, la surdiagonale et le coin inférieur gauche, où il y a des 1. Dessiner* A. *Est-elle inversible ? Calculer son inverse si possible.*

EXERCICE 111. *Existence de l'intégrale* $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{t}{\operatorname{sh} t}\,dt$. *Montrer que* $I = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{2}{(2n+1)^2}$.

Calculer la somme de cette série en admettant que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

EXERCICE 112. *Est-il possible qu'il existe une suite périodique* (a_n), *de période* $p > 1$, *et un entier* $k > 1$ *telle que* $\forall n\ a_{kn} = a_n$ *? En donner un exemple.*

EXERCICE 113. *On pose* $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2-\frac{x^2}{t^2}}\,dt$, f *est-elle définie, continue, dérivable et où cela ?*
Calculer f *à l'aide d'un changement de variable sur l'expression de* f'.

EXERCICE 114. *La matrice* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *vérifie* $A^3 = A + I_n$ *; montrer que* $\det A > 0$.

EXERCICE 115. *Donner la limite de* $\int_a^b f(t)\cos nt\,dt$ *quand* $n \to +\infty$,
1 *Pour* f *en escalier sur le segment* $[a,b]$,
2 *pour* f *continue par morceaux ;*
3 *pour* f *intégrable sur* $]a,b[=]0,+\infty[$.
En déduire la limite de $\int_0^\infty f(t)\sin^2(nt)\,dt$.

EXERCICE 116. *La matrice* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *vérifie* $A^3 + A^2 + A = 0$ *; montrer que son rang est pair.*

EXERCICE 117. *Domaine de définition* D_f *de* $f(x,y) = xy\sqrt{1-x^2-2y^2}$ *? Montrer que la "« courbe »* $f = 0$ *est réunion de deux segments et d'un bout de conique à préciser.*
Trouver les extrema de f *sur* D_f *(on se ramènera à travailler sur l'ouvert* $(x > 0, y > 0, x^2 + 2y^2 < 1)$*).*

EXERCICE 118. *Rayon de convergence* R *de* $\sum_n \left(\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) x^n$. *Étude aux points* $\pm R$.

EXERCICE 119. *La matrice* $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ *vérifie* $A^2 = 0$ *; montrer que son rang est* $\leqslant n$.

EXERCICE 120. *Convergence des séries de terme général*
$u_n = \left(\frac{n+1}{n-2}\right)^n - a - \frac{b}{n}$ *et* $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n + (-1)^n \frac{\ln n}{n}}$.

EXERCICE 121. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *de trace non nulle et* $\Phi(M) = \mathrm{Tr}(A)M - \mathrm{Tr}(M)A$ *; montrer que* Φ *est un endomorphisme de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, *préciser son noyau, son rang, son image (cette dernière a une équation très simple).*
Peut-on diagonaliser Φ *? (indic : polynôme annulateur simple. . .)*

EXERCICE 122. $a_n = \int_0^1 t^n\sqrt{1-t^2}\,dt$. *Montrer que la suite est positive, décroissante. Calculer quelques termes (calculette ou poser* $t = \sin u$*).*
Montrer que la suite vérifie la relation de récurrence $a_{n+2} = \frac{n+1}{n+4} a_n$.
Montrer par ailleurs *que* $a_{n+1} \sim a_n$ *(encadrer).*
Enfin prouver que $(n+1)(n+2)(n+3)a_n a_{n+1}$ *est une constante (que l'on calculera), et en déduire un équivalent de* a_n *ainsi que la convergence de* $(\sum a_n)$.
Calculer $\sum_{n \geqslant 0} a_n$.

EXERCICE 123. *Pour* $P \in \mathbb{R}_n[X]$ *et* $x \neq 1$ *on pose* $Q(x) = \dfrac{1}{x-1}\int_1^x P$.

Montrer que $P \mapsto Q$ *est un endomorphisme de* $\mathbb{R}_n[X]$.
Préciser sa matrice dans la base des $((X-1)^p)_{p=0\dots n}$ *(vérifier que c'en est une). Idem dans la base canonique. Spectre de cette application ?*

EXERCICE 124. *Etude de la suite d'intégrales* $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin nx}{nx+x^2}\,dx$ *(existence, éventuellement limite. . .)*

EXERCICE 125. *Soit* $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ *tq* $u^3+u^2+u=0$, *quelles valeurs peut prendre* $\operatorname{Tr} u$ *?*

EXERCICE 126. *Soit* $f(x) = \arctan(1+x)$. *DSE au voisinage de zéro ? Rayon ?*

EXERCICE 127. *On considère une surface d'équation* $F(p,v,T) = 0$ *où* F *est une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$. *On suppose que, sur la surface, chacune des variables* p, v, T *peut s'exprimer comme une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$ *des deux autres – ainsi* $p = p(v,T)$, *etc.*
Démontrer alors la relation

$$\frac{\partial p}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial p} = -1$$

Vérifier quand (par exemple) $pv = nRT$ *!*

EXERCICE 128. $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *est-elle inversible ? Diagonalisable ? Élements propres ?*

EXERCICE 129. *On prend deux suites telles que* $|a_n| \sim |b_n|$. *Montrer que les séries entières* $\sum a_n x^n$ *et* $\sum b_n x^n$ *ont même rayon de convergence. Indic : ne pas utiliser un critère inadéquat.*

EXERCICE 130. *Établir que* $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x^2t^2)}{1+t^2}\,dt$ *existe et vaut* $\pi \ln(1+|x|)$.

EXERCICE 131. *Diagonalisabilité de la matrice* U *avec des 1 sur la première et la dernière colonne, la dernière ligne et 0 ailleurs ?*

EXERCICE 132. *Montrer que* $\displaystyle\int_1^X \cos(t^3)\,dt$ *admet une limite quand* $X \to \infty$ *(on pourra multiplier et diviser par* $3t^2$*).*
Que pensez-vous de $\displaystyle\int_1^{\infty} \cos(\sqrt{t^3-t})\,dt$ *?. . .*

EXERCICE 133. *On considère un sous-groupe* G *de* $\mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R})$*. On suppose que tout élément* A *de* G *vérifie* $A^2 = I_n$*, en déduire que tout élément de* G *est diagonalisable, et que* G *est commutatif.*
Soient A *et* B *deux matrices diagonalisables qui commutent. Montrer que tout espace propre de* B *est stable par* A *et en déduire qu'il existe une matrice inversible* P *telle que* $P^{-1}AP$ *et* $P^{-1}BP$ *sont diagonales. Étendre ce résultat à toutes les matrices de* G*, en déduire que* G *est fini et enfin que son cardinal est une puissance de 2.*

EXERCICE 134. *Domaine de définition, de continuité, de* $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{x+n}$ *?*
Montrer que $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n}$ *quand* $x \to 0$ *et en donner un équivalent plus simple.*

EXERCICE 135. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*, on définit alors* $B = \begin{pmatrix} A & A \\ O_n & A \end{pmatrix}$.
Montrer que si B *est diagonalisable alors* A *l'est (on calculera* B^k *et plus généralement* $P(B)$ *pour* $P \in \mathbb{R}[X]$*). En raisonnant sur les polynômes minimaux* μ_A, μ_B*, donner la CNS très simple sur* A *pour que* B *soit diagonalisable.*

EXERCICE 136. *On fixe* $m \in]0,1[$*. Montrer que l'ensemble des fonctions* f *à valeurs réelles qui vérifient*

$$\forall x \in [0,1] \ f'(x) = f(mx)$$

forme un espace vectoriel. Montrer qu'elles sont développables en série entière dans un voisinage de 0, expliciter le développement et donner son rayon de convergence.

EXERCICE 137. *Montrer que la matrice* $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ *est diagonalisable dans* $\mathbb{C}$*, puis qu'elle est semblable dans* $\mathbb{R}$ *à* $\begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *(préciser* α*). Résoudre le système différentiel* $X' = AX$ *avec la condition initiale* $X(0) = \begin{pmatrix} -7 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix}$*. Montrer plus généralement que toutes les courbes solutions sont des cercles.*

EXERCICE 138. *Soient deux matrices complexes* A, B *ayant une seule valeur propre et* C *une matrice quelconque. On pose* $D = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$.
À quelle condition C *sera-t-elle diagonalisable ?*

EXERCICE 139. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 1 & \dots & n-1 \end{pmatrix}$*. Est-elle diagonalisable ? Valeurs propres ?*
Déterminant ?
Écrire A *comme combinaison linéaire de matrices ne contenant que des 1 et des 0. Ces dernières sont-elles diagonalisables ? Quelles sont leurs vp ? Commutent-elles entre elles ?*

EXERCICE 140. *La fonction* $x \mapsto F(x) = \int_0^1 \ln\left(\frac{x}{1-t^x}\right) dt$ *est-elle définie pour* $x > 0$ *? continue ?...*

EXERCICE 141. *Limite quand* $n \to +\infty$ *de* $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1/n \\ 1/n & 1 \end{pmatrix}^n$ *?*

EXERCICE 142. *Résoudre* $(1-x^2)y'' - 3xy' - y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

On pourra tester la fonction $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *pour l'équation homogène.*

EXERCICE 143. *Soit* $\mathcal{C}$ *le cercle unité,* F *un point intérieur à* $\mathcal{C}$. *On demande le lieu des centres des cercles* $\mathcal{C}'$ *passant par* F *et tangents à* $\mathcal{C}$. *Idem quand* F *est à l'extérieur. Indication : deux cercles sont tangents quand le système constitué par leurs deux équations a une racine double.*

EXERCICE 144. f *est une fonction continue sur* $[0,1]$.

On pose $B_n(f)(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(\frac{k}{n}) x^k (1-x)^{n-k}$. *On va prouver que la suite de polynômes* (B_n) *converge vers* f, *uniformément sur* $[0,1]$.

(1) Soit S_n *une v.a. suivant une loi binomiale* $\mathcal{B}(n,x)$ *(on prend* $x \in [0,1]$*). Montrer que pour tout* $\alpha > 0, P(|S_n - nx| \geqslant n\alpha) \leqslant \dfrac{1}{4n\alpha^2}$.

(2) On considère la v.a. $f(\frac{S_n}{n})$. *Montrer que* $E\left(f(\frac{S_n}{n})\right) = B_n(f)(x)$.

(3) Rappeler la définition de la continuité uniforme ainsi que le théorème de Heine. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$ *il existe un* $\alpha > 0$ *tel que*

$$\forall x \in [0,1]\ \forall k \in [0,n]\ \left(\left|x - \frac{k}{n}\right| \leqslant \alpha \Rightarrow \left|f(x) - f(\frac{k}{n})\right| \leqslant \varepsilon\right)$$

(4) Justifier $\left|\displaystyle\sum_{|\frac{k}{n}-x|>\alpha} \big(f(\frac{k}{n}) - f(x)\big) P(S_n = k)\right| \leqslant 2\|f\|_\infty P(|\frac{S_n}{n} - x| \geqslant n\alpha)$.

(5) Que vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(x) x^k (1-x)^{n-k}$ *?*

(6) Montrer qu'il existe n_0 *tel que pour tout* $n \geqslant n_0$ *on ait* $|B_n(f)(x) - f(x)| \leqslant 2\varepsilon$ *indépendamment de* $x \in [0,1]$.