

EXERCICES CHOISIS

EXERCICE 1. Orthoptique de l'ellipse : chercher à quelle condition la droite $y - y_0 = m(x - x_0)$ est tangente à l'ellipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ (exprimer que l'équation du second degré en x à laquelle on se ramène a une racine double).

Quels sont les points (x_0, y_0) par lesquels les deux tangentes menées à l'ellipse sont perpendiculaires ?

EXERCICE 2. Où faut-il placer les points M et N sur la figure ci-dessous pour que le réseau routier joignant les sommets du carré $ABCD$ soit le plus court possible (ie que $AM + BM + MN + CN + DN$ soit minimal) ?

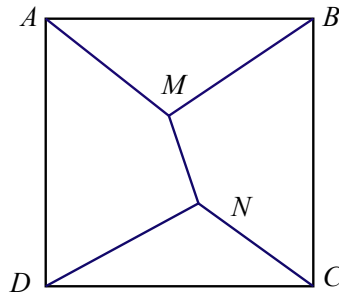


FIGURE 1. Minimiser la somme des distances

EXERCICE 3. Soient k, k' deux entiers naturels tq $kk' = 1$ modulo n (un autre entier). Alors en posant S une séquence arithmétique de raison 1 et de longueur k , et S' une séquence de raison k et de longueur k' dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on a $\text{Card}(S \cap (S' + m))$ qui est presque constant : c'est $\frac{kk'-1}{n}$, sauf pour une valeur de m pour laquelle c'est... autre chose :)

a) Vérifier sur l'exemple $S' = 0, 4, 7$ et $S = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ modulo 10 que l'intersection a deux éléments sauf quand $m = 6$.

b) Prouver le cas général.

EXERCICE 4. On définit un arc paramétré C_n par
$$\begin{cases} x(t) = 4 \cos t - \cos(nt) \\ y(t) = 4 \sin t - \sin(nt) \end{cases} \quad \text{pour } t \in [0, 2\pi].$$

(1) Tracer la courbe C_n pour $n = 2 \dots 7$. On utilisera `import matplotlib.pyplot as plt, import numpy as np` et éventuellement la commande

`T = np.arange(0, 2*np.pi, 0.01)` pour créer une liste de réels incréments de 0.01.

(2) Pour quel(le)s valeur(s) de n a-t-on des points stationnaires ? Dans ce cas, à quelle période se produisent-ils ? Effectuer un DL au voisinage de l'un de ces points et donner l'allure de la courbe.

(3) On pose $\ell_n = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$, on admet que c'est la longueur de la courbe. Représenter graphiquement les points (n, ℓ_n) pour $n = 2 \dots 10$.

(4) Trouver un équivalent de ℓ_n quand $n \rightarrow +\infty$.

EXERCICE 5. Montrer que $\forall Q \in \mathbb{R}[X] \quad \exists P$ unique $| P - P' = Q$.

Exprimer P en fonction de Q . Qu'en déduire si $\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) \geq 0$?

EXERCICE 6. Soit E un $\mathbb{C}$ -ev de dimension finie et u, v deux endomorphismes de E .

(1) On suppose ainsi que dans la question suivante que $u \circ v - v \circ u = u$. Montrer que $\text{Ker } u$ est stable par v .

(2) En raisonnant sur la trace (ou sur $u^k, k \in \mathbb{N}$), montrer que $\text{Ker}(u) \neq \{0\}$.

En déduire que u, v ont un vecteur propre commun.

(3) On suppose maintenant seulement que $u \circ v - v \circ u \in \text{Vect}(u, v)$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle u et v sont simultanément trigonalisables.

EXERCICE 7. On considère une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et on note $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ pour $|x| < R$.

(1) Rappeler la définition de R . Montrer la convergence normale de la série sur $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$ où $0 \leq r < R$ est fixé.

(2) On fixe un tel r . Montrer que la fonction

$$z \mapsto \int_0^{2\pi} \frac{\text{Im } f(re^{it})}{r - ze^{it}} dt$$

est bien définie, qu'elle est développable en série entière, et trouver la somme de cette série en termes de $f(z)$ et $f(0)$. (NB : $a_n = |a_n|e^{i\varphi_n}$)

(3) Déterminer toutes les fonctions f DSE sur $D(0, R)$ et telles que f ne prenne que des valeurs réelles sur le cercle de rayon $r < R$ centré sur l'origine.

EXERCICE 8. Convergence de $\sum \frac{n^p}{n!}$ ($p \in \mathbb{N}$) ? On pose $A_p = \sum_{n \geq 0} \frac{n^p}{n!}$.

Exprimer le DSE de e^{e^x} à l'aide des A_p .

Calculer A_0, A_1, A_2 et montrer que $A_p \in \mathbb{N}$ (on pourra établir une formule de récurrence).

EXERCICE 9. $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que le spectre de M contient trois vp $\alpha \geq 2$, β et $\bar{\beta}$

de module < 1 et que M^n s'écrit $\alpha^n A + \beta^n B + \bar{\beta}^n \bar{B}$ avec deux matrices fixées A, B .

Montrer que toutes les puissances $\alpha, \alpha^2, \dots$ sont irrationnelles.

Montrer que la trace de M^n est l'entier le plus proche de α^n pour $n \geq 4$.

EXERCICE 10. Soit f continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, et $u_n = \int_0^1 t^n f(t) dt$.

Montrer que $\sum u_n$ converge $\Rightarrow f(1) = 0$. Réciproque ?

Et si $t \mapsto \frac{|f(t)|}{1-t}$ est intégrable sur $[0, 1[$?

EXERCICE 11. On considère la matrice $A_{n,a} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $A_{n,a} = \begin{pmatrix} 0 & 1/a & 0 & \dots & 0 \\ a & 0 & 1/a & \ddots & 0 \\ 0 & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1/a \\ 0 & \dots & 0 & a & 0 \end{pmatrix}$.

- (1) Écrire une fonction qui fabrique $A_{n,a}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}^*$.
- (2) Donner des valeurs approchées des v.p. de $A_{n,a}$ pour $n = 3 \dots 8$ et $a \in \{-2, -1, 1, 2, 3\}$.
On pourra utiliser `from numpy import linalg as LA` et `np.array, LA.eigvals`.
- (3) On définit par récurrence $P_1 = X$, $P^2 = X^2 - 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \ P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$.
 - (a) Calculer les coefficients de $P_3 \dots P_8$.
 - (b) Valeurs approchées des racines de ces polynômes?
 - (c) Que conjecturez-vous entre P_n et la matrice $A_{n,a}$? Le démontrer.
- (4) Les matrices $A_{n,a}$ sont elles inversibles? Diagonalisables?
- (5) Trouver un segment de $\mathbb{R}$ qui contienne toutes les v.p. de $A_{n,a}$ pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}^*$.

EXERCICE 12. On considère un morphisme ϕ de $(\mathbb{Q}, +)$ dans un groupe fini G . Montrer que ϕ est constante.

Exhiber un morphisme de groupe de $\text{Gl}_2(\mathbb{Z})$ (les matrices 2×2 à coefficients entiers possédant un inverse de même déterminant) dans $\text{Gl}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

En déduire qu'il n'y a qu'un morphisme de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $\text{Gl}_2(\mathbb{Z})$.

EXERCICE 13. Domaine de définition réel de $\zeta : x \mapsto \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$? Continuité?

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $[a, +\infty[$, $a > 0$ donné, montrer que

$$\left| f(n) - \int_n^{n+1} f(t) dt \right| \leq \frac{1}{2} \max_{[n, n+1]} |f'|.$$

On pose alors $\eta(x) = \zeta(x) - \frac{1}{x-1} = \zeta(x) - \int_1^\infty \frac{dt}{t^x}$. Déduire de ce qui précède que l'on peut prolonger ζ à $]0, +\infty[\setminus \{1\}$, ainsi que des équivalents de $\zeta(x)$ quand $x \rightarrow 1$ ou quand $x \rightarrow 0^+$.

Ce prolongement a-t-il encore un sens quand $x \in \mathbb{C}$ et $\text{Re } x > 0$?

EXERCICE 14. Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, la condition

$$\forall x \in \mathbb{R} \ P(x) + P'(x) \geq 0$$

entraîne que $P \geq 0$ sur $\mathbb{R}$.

Idem quand $P - P'' \geq 0$.

* Que dire si $P - P' - P'' + P''' \geq 0$?

EXERCICE 15. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que A et $2A$ soient semblables. Que dire du spectre de A ? Est-elle diagonalisable? Trigonalisable?

On suppose de plus que $\text{rg } A = 1$, montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 16. On note pour $n \in \mathbb{N}$ $E_n = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x^2 + y^2 \leq n^2\}$, l'ensemble des couples de coordonnées entières tels que le point (x, y) est dans le disque de centre $(0, 0)$ de rayon n . On définit alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la suite (u_n) par

$$u_n = \frac{4 \text{Card } E_n}{(2n+1)^2}$$

- 1) Avec PYTHON, tracer les 50 premiers termes de la suite (u_n) . Faire une conjecture sur la limite de cette suite.
- 2) Montrer que $\text{Card } E_n = 1 + 4n + 4 \text{Card } E_n^{++}$ où $E_n^{++} = \{(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \mid x^2 + y^2 \leq n^2\}$.
- 3) Montrer que $\text{Card } E_n^{++} = \sum_{x=1}^{n-1} \lfloor \sqrt{n^2 - x^2} \rfloor$ (partie entière).
- 4) Montrer alors

$$1 - n + \sum_{x=1}^{n-1} \sqrt{n^2 - x^2} \leq \text{Card } E_n^{++} \leq \sum_{x=1}^{n-1} \sqrt{n^2 - x^2}.$$

On pose à présent pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{1}{n^2} \sum_{x=1}^{n-1} \sqrt{n^2 - x^2}$.

- 5) Tracer avec PYTHON les 50 premiers termes.
- 6) Montrer que la suite (v_n) est convergente et trouver sa limite sous forme d'une intégrale, et la calculer.
- 7) En déduire la limite de (u_n) .
Retrouvons cette limite avec des probabilités. Pour $p \in \mathbb{N}^*$ on pose $X_1, \dots, X_p$ et $Y_1, \dots, Y_p$ des variables aléatoires suivant une loi uniforme dans $[-n, n]$.
On note Z_k la variable aléatoire qui vaut 1 si (X_k, Y_k) est dans E_n et 0 sinon, et $S_p = \sum_{k=1}^p Z_k$.
- 8) Exprimer quelle est la loi de S_p .
- 9) Calculer $\frac{S_p}{p}$ pour des valeurs de p et n données (p très grand).

Simulations avec PYTHON.

EXERCICE 17. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix}$ ($xyz \neq 0$). Factoriser A sous la forme CC^T où C est une matrice colonne. Que dire du rang de A ?

Montrer que A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$. Préciser a en fonction de x, y, z et en déduire à quelle condition A est diagonalisable.

EXERCICE 18. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $s_n = \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}$.

- 0) Calculer avec PYTHON des valeurs approchées de $s_{10}, s_{100}, s_{1000}$ (question rajoutée).
- 1) Énoncer la formule de Taylor avec reste intégrale et en déduire que

$$s_n = e^n - \frac{n^{n+1/2}}{n!} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n e^{x\sqrt{n}} dx.$$

- 2) Limite de s_n quand $n \rightarrow +\infty$?
- 3) Montrer que $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n e^{x\sqrt{n}} dx$ admet une limite et la calculer.
- 4) En déduire un équivalent de s_n .
Que peut-on dire de la médiane d'une loi de Poisson $\mathcal{P}(m)$, $m \rightarrow +\infty$?

EXERCICE 19. À tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on associe $U(P) : x \mapsto e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} P(t) dt$.
 Montrer que U est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
 Est-il diagonalisable ? Inversible ? Si oui exprimer son inverse.

EXERCICE 20. Cardinal de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{GL}_n(\mathbb{Z})$? Lister les éléments quand $n = 2, 3$.

EXERCICE 21. On dit qu'une v.a. X est **décomposable** ssi il existe deux v.a. Y et Z non constantes p.s. telles que $X = Y + Z$. Elle est **indécomposable** ssi $X = Y + Z$ entraîne que Y (ou Z) est constante (p.s.).

(1) Montrer que X est décomposable dans les trois cas suivants :

- $X \sim C^{te}$;
- $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, $n \geq 2$;
- $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

(2) Dans la suite on suppose que X suit une loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, n\}$.

Montrer que X est décomposable $\iff$ le polynôme $1+t+\dots+t^{n-1}$ se factorise en produit de deux polynômes unitaires non constants, à coefficients positifs ou nuls.

(3) On suppose que n n'est pas premier : $n = ab$ avec $a, b \geq 1$.

- (i) Montrer que $1+t+\dots+t^{n-1}$ est divisible par $1+t^a+t^{2a}+\dots+t^{(b-1)a}$ et calculer leur quotient.
- (ii) En déduire deux v.a. Y, Z à valeurs respectivement dans $\llbracket 0, a-1 \rrbracket$ et $a\llbracket 0, b-1 \rrbracket$ telles que $X = Y + Z$.

(4) On suppose n premier et on va montrer par l'absurde que X n'est pas décomposable. Supposons donc que $X = Y + Z$, càd que

$$1+t+\dots+t^{n-1} = U(t)V(t)$$

pour deux polynômes unitaires U, V de degrés $r, s \geq 1$ à coefficients positifs ou nuls.

(i) Montrer que $U(t) = t^r U(1/t)$ et de même pour V .

On peut alors noter $U(t) = 1+u_1t+\dots+u_{r-1}t^{r-1}+t^r$ avec $u_1 = u_{r-1}, u_2 = u_{r-2}, \dots$ et similairement $V(t) = 1+v_1t+\dots+v_{s-1}t^{s-1}+t^s$.

Pour fixer les idées on prend $r \leq s$.

(ii) Montrer que $u_k v_k = 0 \ \forall k = 1 \dots r$.

(iii) En déduire $u_k, v_k \in \{0, 1\} \ \forall k = 1 \dots r$.

(iv) Conclure en considérant $U(1) \times V(1)$ (on achèvera de prouver que tous les v_k valent 0 ou 1).

EXERCICE 22. On considère l'ensemble $\mathcal{X}$ des matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ dont les deux valeurs propres sont de module 1. Montrer que $\mathcal{X}$ est un fermé.
 Indic : on pourra considérer l'application $A \mapsto (\text{Tr } A, \det A)$.

EXERCICE 23. Caractériser les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ semblables à leur carré. Idem dans $\mathbb{R}$. Essayer de pousser en dimension supérieure à 2, au moins dans le cas diagonalisable.