Indications – pour ceux qui ont tout essayé...

▷**1)** Passer en exponentielle.
Commencer par $n^2 = n(n-1)+n$...
Pour $\sum_0^{+\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)!}$ on peut introduire les sommes “cousines”, ou éventuellement calculer les dérivées jusqu'à la troisième.

▷**2)** Si d'Alembert ne marche pas, on peut encadrer le TG ou en trouver un équivalent.
$a_n = \left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}$ oscille entre deux limites, on peut alors utiliser le critère sur ($a_n z^n \to 0$ ou pas).
Pour $\frac{1}{n\sqrt{2}-\lfloor n\sqrt{2}\rfloor}$ il faut observer que $(n\sqrt{2}-p)(n\sqrt{2}+p) = 2n^2-p^2$ est un entier *non nul*...

▷**4)** Surtout pas d'Alembert, car on ne sait absolument pas si on a même le droit de calculer a_{n+1}/a_n ! Se rabattre sur les critères de convergence la série ou de (non-) DVG.

▷**6)** V F F F V (une implication facile pour le dernier, récip par DVG ou somme de deux SE).

▷**7)** Dérivée ou produit de Cauchy.

▷**8)** $\cos x \operatorname{ch} x, \cos(x+a)$: plusieurs méthodes avec des fortunes diverses.
Attention à la décomposition de $\ln(x^2-5x+4)$. Pour $\ln(1+x+x^2)$, dériver et intégrer.
$y = (\operatorname{Arc}\sin x)^2$ vérifie $(1-x^2)y''-xy' = 2$. On peut alors trouver les coefficients par récurrence.

▷**9)** La difficulté est de passer en $x = 1$. Pour ça il faut montrer (par le TSA probablement) que la somme de la série entière est une fonction définie *et continue* sur $[0,1]$.
NB : $\int \frac{dx}{1+x^3} = -\frac{1}{6}\ln\left(x^2-x+1\right)+\frac{1}{3}\ln(x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)(+C^{te})$.

▷**10)** $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{16^p}\frac{x^{8p+1}}{8p+1} = \int_0^x \frac{dt}{1-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^8}$ et de même pour les trois autres morceaux.
Il faut simplifier la grosse fraction obtenue, qui a des racines évidentes : il reste

$$\frac{16(x-1)}{x^4-2x^3+4x-4} = \frac{16(x-1)}{(x^2-2)(x^2-2x+2)}$$

qu'on intègre grâce à une DES (noter que $x^2-2x+2 = (x-1)^2+1$).

▷**11)** L'idée est bien sûr de passer du produit de deux polynômes à un produit (de Cauchy) de DSE.

▷**13)** NB : $\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt - \int_0^x e^{-t^2}\,dt$. D'où en posant $y = e^{x^2}\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt, y' = 2xy-1$. Récurrence pour les coefficients.
NB : on sait que y est DSE de rayon infini sans le moindre calcul...

▷**14)** TDTàT. Majorer $|f_a^{(p)}|$ pour la convergence de la série de Taylor et celle de son reste (vers 0). Utiliser que $\sin^{(p)}(x) = \sin(x+p\frac{\pi}{2})$ pour alléger les écritures.

▷**17)** Penser à vérifier le R de CV une fois les coeffs trouvés.

▷**18)** La dérivée de $f^2 = f \times f$ se fait bien par la formule de Leibniz.
Il est crucial de noter que les dérivées sont positives (sur $[0,\pi/2[$) et donc la somme partielle de la série de Taylor croît (d'ailleurs le reste intégrale est lui aussi $\geqslant 0$...)
On peut ignorer les p premiers termes (jusqu'à x^{2p-2}) car ils vont disparaître à la dérivation, il reste une série alternée : $\frac{d^{2p}}{dx^{2p}}\left((1+x^2)^{p-1/2}\right) = \frac{(2p)!}{p!}\sum_{k\geqslant 0}\frac{(-1)^k(2k+2p)!}{4^{k+p}(k+p)!k!}x^{2k}$.

▷**19)** $\frac{1}{1-x-x^2} = \sum_{n\geqslant 0} f_n x^n$ se développe avec la suite de Fibonacci. Appréciez la valeur de cette fraction quand $x = 1$!

▷**20)** En tout cas pour $|x| < 1$ on sait calculer la limite des sommes partielles. Comme la fonction obtenue a un pb pour $x = 1$ c'est que R est atteint. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{dt}{1 - x\tan t} = \frac{x\log(4) - 4x\log(1-x) + \pi}{4x^2+4}$.

▷**21)** La bonne combinaison est $f'(x) - 4xf'(x) = \frac{1}{2}f(x)$ (réindexer). $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-4x}}$.

▷**22)** Pour le dénombrement : une permutation qui a k points fixes dérange les $n-k$ autres. Il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir les fixes...

$$1 = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} a_k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!}\frac{1}{(n-k)!},$$

comme ça ça se voit mieux ? :).

▷**23)** Récurrence : noter k le nombre des termes du premier facteur de la dernière multiplication (ouf !), i.e. si le parenthèsage est $(ab)(c(de))$ on a $k = 2$.

Faire le DSE (hypothétique) de $\varphi(x) \times \varphi(x)$. Attention aux termes de petit degré.

▷**24)** $\zeta^{(k)}(a) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^k \frac{(\ln n)^k}{n^a}$, et $\dfrac{1}{n^{s-a}} = e^{-(s-a)\ln n}$. Ne pas oublier les $|\ |$ pour la sommabilité.