Indications – pour ceux qui ont tout essayé...

▷**2)** Écrire la solution particulière de l'ED sous forme intégrale. Remplacer f (resp. g) par $f-\ell$ et exprimer que $g \to 0$ avec des ε. Découper l'intégrale avant de la majorer.

▷**3)** Pour le sens non trivial, écrire $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(x\,2^{-n}) - f(x\,2^{-n-1})$ et comparer terme à terme $f(x)/x$ à $\sum \ell 2^{-n}$ où $\ell = \lim \dfrac{f(x)-f(x/2)}{x}$.

▷**4)** Attention que A' et A ne commutent pas forcément.
Pour A^{-1}, justifier la dérivabilité puis dériver $A \times A^{-1}$.
Pour det penser à la comatrice en regardant le terme facteur de $a'_{i,j}$.

▷**6)** Majorer proprement la différence entre $f(\dfrac{k}{n^2})$ et $\dfrac{k}{n^2}f'(0)$.

▷**7)** Soustraire $f(x+h)-f(x)-hf'(x)$ de $f(x-h)-f(x)+hf'(x)$, il en résulte en majorant ces deux quantités que

$$2h\|f'(x)\| \leqslant \|f(x+h)\| + \|f(x-h)\| + 2\|f(x)\| + h^2\|f''\|_\infty \Rightarrow \|f'\|_\infty \leqslant \frac{2\|f\|_\infty}{h} + h\frac{\|f''\|_\infty}{2}$$

On étudie cette fonction de h pour trouver son minimum, $2\sqrt{\|f\|_\infty\|f''\|_\infty}$.

▷**9)** $f'([a,b])$ est un intervalle car c'est l'adhérence d'un autre intervalle, l'ensemble des valeurs des taux d'accroissement. Plus précisément, $\{\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \mid x < y\}$ est connexe par arcs car image continue de $\{x<y\}$ qui l'est. Son adhérence contient $f'([a,b])$ et réciproquement, tout taux d'accroissement est une dérivée par le TAF : ces deux ensembles sont égaux – et connexes par arcs.
On peut aussi faire à la main. Pour l'exemple, f et g sont intégrables sur $[0,x]$ et on peut même écrire

$$\int_0^x \sin(1/t)\,dt = \int_0^x -t^2\frac{\sin(1/t)}{t^2}\,dt = x^2\cos(1/x) - \int_0^x 2t\cos(1/t)\,dt$$

où la deuxième intégrale est celle d'une fonction continue et est donc $\mathcal{C}^1$ (de même pour g).
On déduit du thm de Darboux que f^2, g^2 ont la PVI. Mais leur somme ne l'a pas, donc n'est pas une dérivée (don pas une somme de dérivées).

▷**10)** $\operatorname{Im} f' = f'(\mathbb{Q}) \cap \{0\}$. Par l'exo 9, cet ensemble, dénombrable, est un intervalle (!).

▷**11)** Le plus efficace est de remarquer que $g(x) = \int_0^1 f'(xt)\,dt$.

▷**12)** On sait que $\sum na_n z^{n-1}$ converge normalement sur $[-r,r]$ pour $0 \leqslant r < R$, ce qui donne aussi la CVN sur le disque de rayon r dans $\mathbb{C}$.
On peut alors appliquer le TDTàT et vérifier que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = f'(x+iy)$ (presque pareil pour l'autre dérivée partielle). On calcule $\Delta f = 0$ (il y a une réciproque en théorie de la variable complexe).

▷**13)** On a $y(\alpha) = \alpha = \sqrt{3\pi/2}$ d'où $y'(\alpha) = \cos(3\pi/2) = -1$. Pour la suite, il faut développer $y'', y^{(iii)}\ldots$ etc en remarquant que les $\cos(xy)$ et les $xy'+y$ sont nuls. De ce fait tous les termes du développement (au moins jusqu'au 5ᵉ) sont nuls :

$$y(\alpha+h) = \alpha - h + O(h^6)$$