Indications – pour ceux qui ont tout essayé...

▷**1)** Première équation : sol part polynômiale de degré 4. Terme en x^2 arbitraire (sol de l"équation homogène). Il y a un recollement en 0 (sans condition, pan de solutions).
Deuxième : il est avanatgeux de poser $x = \operatorname{sh} t$ (ou de reconnaître la primitive de Arg sh).
$xy' + |y| = x^2 + \frac{3}{2}$, $y(1) = -1$: on a déjà $y < 0$ dans un certain voisinage de $x = 1$ et donc on peut se ramener à résoudre $xy' - y = x^2 + \frac{3}{2}$ jusqu'à ce que sa solution change de signe.
Similaire pour la dernière, discuter selon le signe de $y - x$. Les solutions les plus compliquées s'obtiennent par recollement.

▷**2)** On écrit la solution particulière sous forme intégrale. La transformer pour avoir une intégrale sur un intervalle fixe :

$$x \mapsto \int_0^1 \frac{t^{\lambda-1}}{1+xt}\,dt$$

et vérifier sa limite en 0 (théorème de continuité sous le signe somme).
On peut effectuer le DSE à partir de cette expression, ou bien le chercher *a priori* sur l'équation (diviser par $1 + x$).

▷**3)** Transformer la solution sous forme intégrale avec le changement de variable $u = \frac{1}{t} - \frac{1}{x}$. Notez que le DSE diverge toujours.

▷**4)** En cascade.
Matriciellement ou additionner les équations et extraire un système 2×2.
Poser $z = x + iy$.
Se ramener à une équation mais de degré 2. Solutions évidentes, si elles ne le sont pas en chercher de la forme $x = t^\alpha$.
Gros système : méthode générale (valeurs propres : $2, 0, 2m$,
solution particulière $\{m, 2mt - 2e^{mt}, 2mt - 2e^{mt} + m\}$).

▷**5)** On résout facilement en regroupant les fonctions inconnues par deux.

▷**6)** Les solutions sont des CL indépendantes de $e^{\lambda t}.V$, qui ne tendent vers 0 que si $e^{\lambda t} \to 0$.

▷**7)** 0 est v.p. Dans le dernier cas on se ramène à une matrice de Jordan et un système de la forme $\begin{cases} x' &= y \\ y' &= z \\ z' &= 0 \end{cases}$ d'où $x = at^2 + bt, y = 2at + b, z = 2a$ ce qui donne une parabole dans le plan $z = 2a$.

▷**8)** En cascade.
Soit en découplant (poser $x' = u, y' = v$) soit au contraire en écrivant une équation d'ordre 4 en x et en la résolvant par recherche de solutions exponentielles.
Mêmes méthodes, on peut aussi passer en $x \pm y$.

▷**9)** $(x, y, z) = \left(ae^t + be^t t + \frac{1}{2}ce^t t^2, be^t + ce^t t, ce^t\right)$.

▷**10)** $X(x + y) = X(x)X(y) \Rightarrow X'(t) = X'(0)X(t) \iff X' = AX$. On tente la solution $X = \exp(tA) \times X(0)$ (ou on dérive $\exp(-tA) \times X$).

▷**11)** NB : l'origine de cet exo est un pb de chimie.
Dans le cas diagonalisable (éventuellement dans $\mathbb{C}$) on a des solutions de la forme

$$e^{at}u + e^{bt}v = \begin{pmatrix} e^{at} \\ e^{bt} \end{pmatrix}$$

Distinguer selon que $a, b \in \mathbb{R}$ et leurs signes, ou pas.

▷**12)** Var de l'ex-constante.
Solution DSE : sinus cardinal. Chercher une autre de la forme $g(x) \sin x/x$.
On trouve deux solutions en x^α.
Une solution est e^{-2x}. L'autre est un polynôme.
Sol simple : $y = x$.
Soit poser $x = \tan t$, soit reconnaître une dérivée d'un produit, soit poser $z = y\sqrt{1 + x^2}$.
$e^{i \sin x}$.

▷**13)** Redériver (justifier).

▷**14)** On a des combinaisons des $e^{\lambda t}$ où λ est une des trois racines complexes de $X^3 + X + 1$.

▷**15)** Sinusoïdes amorties en regroupant apr conjuguées (ou parties réelles et imaginaires).

▷**17)** Cette matrice s'appelle la résolvante (hors-programme). On a $x(t) = x(0)g(t) + x'(0)h(t)$ car mêmes conditions initiales et même ED.

▷**18)** Résoudre l'équation caractéristique.

▷**19)**

$$yy' = -y'y'' e^{-x^2} \Rightarrow y^2 = C^{te} - y'^2 e^{-x^2} - \int_0^x 2xy'^2 \, dx$$

▷**20)**

a) Attention, pté fausse en générale ($\sin(x^2)$). Comme à l'exercice précédent, multiplier par y'. On en déduit que

$$\frac{y'^2}{2} = \int y'y'' = -\int qy$$

a une limite en ∞, puis que c'est le cas aussi pour y'. Raisonner par l'absurde pour montrer que cette limite est nulle. Interprétation physique possible (état d'équilibre avec une force de rappel et pas de frottement).

b) Que faire de l'indication sinon dériver ? Il vient $W' = 0$. Appliquer la question précédente pour déduire que $W = 0$.

▷**21)** Sol constante $\Longleftrightarrow$ les dérivées sont constamment nulles. On trouve l'origine et deux points symétriques $/(Oz)$: $z = 27$ et $x = y = \pm\dfrac{9}{2\sqrt{2}}$.

Les trajectoires linéarisées sont des spirales (deux vp complexes conjuguées donnent de la rotation, cf. exo 11).