Indications – pour ceux qui ont tout essayé…

▷**1)** $\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$ est une dérivée.

▷**2)** Au pire, www.integrals.com… Pour le changement de variable naturel (!!!) $t = \dfrac{\sqrt[3]{x^3-x}}{x}$ il est conseillé de dire plutôt que $t^3 = 1 - 1/x^2$ et d'en déduire les relations entre dt et dx et autres.

▷**3)** a) Formule de Leibniz. beaucoup de termes vont être nuls.
b) $I_n \to 0$ par CVU.
c) Une suite d'entiers jamais nulle (car $P_n > 0$ sur $]0,\pi[$) ne peut tendre vers 0.

▷**4)** Equivalents, majoration, passer sous forme exponentielle…

▷**5)** Si sin, cos aussi. Ajouter les deux, changer de variable, découper.
Pour la dernière, un réel de $[a,b]$ peut se paramétrer par $a\cos^2 + b\sin^2 t$ (hé oui, barycentre).

▷**6)** $0 \leqslant g - f \leqslant h - f$ qui est positive et intégrable.

▷**7)** Élements simples, résultat compliqué, what else ? NE PAS UTILISER la formule trouvée pour calculer la limite.

▷**10)** Pour la fonction Beta, trouver une formule de récurrence par parties.
Arctan : parties et changement de variable et DES.
Qui dit cos dit sin…

▷**12)** CV : équivalents et majorations.
Calcul : on est ramené à $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{3\varepsilon} \frac{\sin x}{x^2}$ où $\varepsilon \to 0$. En posant $\sin x = x(1+\eta(x))$ où $\eta(x) \to 0$ on récupère un $\ln 3 + o(1)$. L'exo était donné sans indications…

▷**13)** Pour $x \mapsto e^{-x^2|\sin x|}$ ou fonctions du même genre, l'intégrale se concentre autour de $\pi/2 + k\pi$ (dessiner). Essayer des découpages avec $[\pi/2 + k\pi - 1/k, \pi/2 + k\pi + 1/k]$ ou du même genre.

▷**15)** La formule vient de ce que $Q(x) = \displaystyle\prod_{\xi \text{ racine de } Q} (x - \xi) \sim Q'(\xi_0)(x - \xi_0)$ au voisinage de la racine ξ_0 (Taylor). Donc ici on a des $\dfrac{\xi^p}{2q\,\xi^{2q-1}}\dfrac{1}{x-\xi}$ comme éléments simples. Bon courage…

▷**16)** Equivalents aux bornes.
Pour le calcul (!) on peut développer en séries (entières) ou tenter des changements de variable sportifs comme $u = \left(\dfrac{x}{1-x}\right)^4$ (deuxième intégrale) ou $t = \sin^2 x$ (première).

▷**17)** Ne pas oublier de vérifier (DL aux bornes) que ces intégrales existent !
a) Par parties évidemment (même remarque pour le crochet) ce qui donne $I = \dfrac{\pi}{2}J$.
b) Remplacer $\int f^2$ par $J - \int_0^1 \frac{f^2(t)}{\tan^2 \pi t}\,dt$.

▷**18)** On peut exprimer $a_n = v_n(x) - 10v_{n-1}(x)$ et donc fabriquer f comme une série de fonctions en escalier. Reste à vérifier la qualité de la convergence, et ITàT.

▷**19)** $\dfrac{n \pmod k}{k} = \dfrac{n}{k} - \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$. Les fonctions en escalier $x \mapsto \dfrac{1}{n}\lfloor \frac{n}{x} \rfloor$ tendent uniformément vers $1/x$ sur $[a,b]$.

▷**20)** Ecrire $I_r = \lim \dfrac{1}{n}\sum \ln(1 - 2r\cos\frac{k\pi}{n} + r^2)$.
Autre méthode : dériver (en justifiant) I_r par rapport à r.

▷**21)**

$$\theta - \frac{\theta^3}{6} \leqslant \sin\theta \leqslant \theta \quad \forall \theta \geqslant 0$$

▷**22)** Écrire comme l'intégrale d'une fonction qui vaut 0 pour $t \geqslant n$ pour pouvoir appliquer le TCD.

▷**23)** $\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n$ se règle par un DL classique (passer sous forme exponentielle). Attention au dernier où le TCD ne s'applique pas, en tout cas pas directement (changer de variable).

▷**24)** $t^n = u$ voire $t^{n+1} = u$.

▷**26)** CVD. Pour le **, faire un DSE de $\dfrac{1}{1+t+\dots t^n} = \dfrac{1-t}{1-t^{n+1}}$ et intégrer deux termes par deux termes.

▷**27)** 1) Cv dominée.
2) Poser $t = \sqrt{n}(1-x)$. On a CV simple de l'intégrande vers e^{-3t^2}, de plus comme $\ln(1+u) \leqslant u$ on a

$$\ln\left(1 - \frac{3t^2}{n} + \frac{2t^3}{n\sqrt{n}}\right)^n \leqslant -3t^2 + \frac{2t^3}{\sqrt{n}} \leqslant -t^2$$

car $\dfrac{t}{\sqrt{n}} \leqslant 1$. On peut alors conclure par CV dominée.

▷**28)** L'interversion échoue donc. . .
* $\int_0^1 |v_n| = \int_0^{x_n} v_n + \int_1^{x_n} v_n$. Finir en divisant en haut et en bas par n^n.

▷**31)** $\dfrac{t^{x-1}}{1+t} = t^{x-1} - t^x + t^{x+1} - \dots t^{x+n} +$ le reste. Majorer la somme partielle en discutant selon parité de n.

▷**32)** $1/(1-a) = \sum a^n$. La somme partielle de la série de fonctions est majorée par la somme totale, la série des intégrales (des valeurs absolues) a aussi ses sommes partielles majorées.

▷**34)** Si $(\sum I_n)$ convergeait, ce serait vers quoi ?
Alternativement on peut utiliser l'exercice 1 et trouver un équivalent de I_n (à constante près), cf. exercices avec elations similaires dans la feuille sur les séries numériques.

▷**35)** $x = t^{n+1}$.

▷**36)** Une primitive de sin est $1 - \cos$.

▷**37)** Commencer par ipp, majorer f et f' par des constantes.
h peut s'écrire en termes de sinus cardinal (bien plus commode que des DL sans fin).

▷**39)** Pour la limite en $+\infty$ une simple majoration suffit (idem exo précédent).

▷**42)** Le changement de variable est élémentaire. Pour utiliser le TCD on fait comme à l'exercice 22, on introduit une fonction nulle avant $-\sqrt{x}$ et égale à $\left(1 + \frac{y}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-y\sqrt{x}}$ pour $y > -\sqrt{x}$. Un DL à l'ordre 2 donne la limite de ceci quand $x \to +\infty$ et il reste à trouver une majoration convaincante. . .

▷**43)** Prendre x borné pour utiliser les gros théorèmes, e.g. majorer $\dfrac{1-\cos xt}{t^2}$ par $x^2/2$ pour $t \leqslant 1$ et par 2 ailleurs.

▷**45)** $\int f'(xt)\,dt$.

▷**46)** Soit écrire $\displaystyle\int_0^1 \cos(x + (y-x)t)\,dt$ soit

$$\frac{2\sin(\frac{x-y}{2})\cos(\frac{x+y}{2})}{x-y} = \operatorname{sinc}(\frac{x-y}{2})\cos(\frac{x+y}{2}).$$

▷**47)** Utiliser qu'un polynôme tend vers ∞ en l'infini, i.e. $|P(re^{it})| \geqslant A$ donné pour r assez grand indépendamment de t.
Montrer que $\varphi'(r) = 0$ (ne pas se gourrer de variables).

▷**48)** Calculer les dérivées partielles, remonter en intégrant par rapport à x. On a un résulat à une constante près. . . qui dépend de y. Redériver par rapport à y pour trouver le résultat.

▷**49)** On trouve $\|f\|_\infty$. Factoriser cette valeur et (quand f est en escalier) isoler l'intervalle (ou les intervalles) où elle est atteinte.
Pour f continue, encadrer par deux fonctions en escalier distantes au plus de ε et en déduire que la quantité étudiée est dans la fourchette $\|f\|_\infty \pm 2\varepsilon$ pour p assez grand.

▷**50)** La difficulté est la continuité en 0. On pourrait la prouver en découpant l'intégrale tous les $k\pi$ (série alternée. . .)

▷**51)** Dériver $/.y$.

▷**52)** Attention aux $t < 0$. . .

▷**53)** La fonction n'est pas intégrable. Utiliser la valeur connue de l'intégrale du sinus cardinal.

▷**54)** Dériver. Idem suivant.

▷**56)** $|1-xe^{-it}|^2 = 1-2x\cos t + x^2$.

▷**57)** À la main. On peut calculer la dérivée en réfléchissant un peu.

▷**58)** Dériver h sous l'intégrale et intégrer le résultat par parties (ou h direct) pour avoir une relation entre h et h'.

▷**59)** Introduire $2u\cos(u^2) = \big(\sin(u^2)\big)'$. Vérifier les convergences.

▷**60)** Ne pas oublier de vérifier les conditions sur $x = t/\sqrt{n}$ pour appliquer l'inégalité obtenue en 3) au TCD.

▷**61)** Noter que $\mathcal{L}(f)(x)$ est continue et tend vers 0 en $+\infty$. Il faut une condition supplémentaire pour dériver.
Près de 1, dire que $|\ln t - (t-1)| \leqslant \varepsilon |t-1|$.

▷**62)** La def est donnée à l'exo précédent. Justifier l'usage du TITàT.

▷**63)** On trouve une série de Taylor divergente, $\sum (-1)^n n! x^n$.

▷**64)** Pour l'expression de la série, développer l'exponentielle et utiliser des symétries de cos puis se ramener à des intégrales de Wallis.
Pour l'"équivalent, hmfrrr. Ecrire plutôt une intégrale sur $[-\pi, \pi]$ et découper la portion sur $[-\alpha, \alpha]$ avec un α bien choisi en fonction de x (genre $1/\sqrt{x}$) pour que l'intégrale résiduelle soit négligeable.
Enfin traiter $\displaystyle\int_{[-\alpha,\alpha]}$ grâce à un DL de la fonction cos. Ceci s'appelle la méthode de Lagrange et c'est trèèèèèès hors-programme.
Respirer profondément.