Indications – pour ceux qui ont tout essayé...

$\triangleright$**2)** On peut se contenter des dispositions avec une tour par colonne à condition de prouver qu'il y en a une et une seule, ou alors prendre les 2^{64} dispositions de 0 à 64 tours quelque part sur l'échiquier, ou les dispositions de 8 tours n'importe où mais attention à combien de fois vous comptez chaque disposition...

$\triangleright$**3)** L'espace le plus naturel est celui des applications de l'ensemble des n personnes à valeur dans $\{1, 2 \dots 365\}$.

$\triangleright$**5)** Somme des probas de tous les entiers = 0 ?

$\triangleright$**7)** Réussite ou échec avec le même déterminisme = Bernoulli. La probabilité de l'expérience est déterminée expérimentalement par la loi des grands nombres. La loi de la première réussite dans une suite de Bernoulli est donnée par une loi géométrique.

$\triangleright$**8)** Géométrique.

$\triangleright$**9)** $p+(1-p)(1-q)\times p+(1-p)^2(1-q)^2\times p+\ldots = \dfrac{p}{1-(1-p)(1-q)} = \dfrac{p}{p+q-pq} = \dfrac{1}{1-q+q/p}$.

Noter l'avantage de commencer : si $p = q$ par exemple on trouve $\dfrac{1}{2-q} > 1/2$.

$\triangleright$**10)** Si A descend B, il est mort. Pareil si B descend A au lieu de C. Sans faire les calculs extensivement, on peut présumer que A ferait mieux de ne pas risquer de tuer B (ni B de tuer A).

Si A descend C (proba 0.3), alors cela devient un duel avec loi géométrique, avec B qui tire en premier et d'après l'exercice 9 B a la probabilité $\frac{0.5}{0.5+0.3-0.15} = \frac{10}{13}$ de le gagner. Pour le refaire à neuf, la probabilité de survie de A **dans cette hypothèse** est la somme des probabilités des évènements où B rate A k fois de suite, et A rate B $k-1$ fois puis poum, soit

$$0,5\times 0,3+0,5^2\times 0,7\times 0,3+\ldots 0,5^k\times 0,7^{k-1}\times 0,3+\ldots = \frac{0,5\times 0,3}{1-0,5\times 0,7} = \frac{15}{65} = \frac{3}{13}.$$

Autrement dit le pauvre A n'a que 3 chances sur 13 d'en réchapper dans ce cas de figure.

Il y a aussi le cas plus probable (proba 0.7) où A rate C. Dans ce cas, B tire sur C.

— Si B réussit, on repart sur une loi géométrique entre A et B (mais avec A qui commence) et une proba de survie de A égale à $\frac{0.3}{0.5+0.3-0.15} = \frac{6}{13}$.

— Si B rate, alors C le descend (meilleure stratégie, A est moins dangereux) et cela devient un duel entre A et C, avec proba pour A de survie égale à $0,3$ (une seule chance, après il est mort). Même si A commence, il est mal barré.

En pondérant ces différents cas par leurs probabilités respectives on trouve

$$\mathcal{P}(\text{A survit}) = 0,3\times\frac{3}{13}+0,7\times\left(0,5\times\frac{6}{13}+0,5\times 0,3\right)\approx 0.335769.$$

Si maintenant A tire en l'air (!), on est ramené à des valeurs déjà calculées :

— Si B descend C, le duel a 6 chances sur 13 de bien finir pour A (car celui-ci le commence).

— Si B rate C, C ne le ratera pas et A a encore 0,3 chances de réussite.

Au total on a alors $0,5\times\dfrac{6}{13}+0,5\times 0,3\approx 0,38077$, le meilleur choix.

Curieusement, B a la meilleure chance de survie (C est « l'ennemi à abattre », et il a le handicap de tirer le dernier).

$\triangleright$**12)** On veut P(nombre de tartes $< 5) < 10\%$. Le nombre de tartes dans la tronche suit une loi binomiale.

$\triangleright$**13)** Sachant que Ron a déjà k vignettes, la probabilité d'en tirer une nouvelle est $\dfrac{n-k}{n}$ et le temps d'attente de la première réussite est régi par une loi géométrique.

▷**15)** Proba de première réussite = loi géométrique. $p_g = 1/X$ et son espérance se calcule par le théorème de transfert.

▷**17)** Nugget jamais retourné : $(1-p)^k$. La proba que tous soient retournés au moins une fois est donc $\big(1-(1-p)^k\big)^N$. Ceci est > 0.9 pour $N > \frac{\ln 0.9}{\ln\left(1-(1-p)^k\right)} \approx \frac{.1}{(1-p)^k]}$ pour k grand.

▷**19)** Pour la question subsidiaire on a une loi de Bernoulli pour chaque jour de pêche (atteindre ou pas 10 truites). Leur répétition est géométrique.

▷**20)** Pour arriver à égalité en 6 services il y a la probabilité $q = \binom{6}{3}p^3(1-p)^3$. À partir de là Rafael remportera le jeu s'il y a, soit une suite GPGPGP. . .GP suivie de GG (G=gagné, P=perdu), soit PGPG. . .PGGG. Le premier cas a une probabilité de $p^k(1-p)^k p^2$, le second une probabilité identique. En sommant sur k on trouve la probabilité de gain après une égalité, $\frac{40p^5(1-p)^3}{1-p+p^2}$. Il faut encore rajouter les jeux blancs (p^4), à 15 ($\binom{4}{1}p^4(1-p)$), et à 30 ($\binom{4}{2}p^4(1-p)^2$), pour un total de $-34p^6+64p^5+11p^4-40p^3-40p^2+\frac{40(p-1)}{p^2-p+1}+40$ (qui tend vers 0 quand $p \to 0$ et vers 1 quand $p \to 1$ comme prévu, la courbe ressemble à un $\int$).

▷**21)** On connaît $P(D \mid A), P(D \mid B)$ et on cherche $P(A \mid D)$. . .
Deuxième partie : écrire que $P(X=k) = \sum\limits_n P(X=k \mid Y=n) \times P(Y=n)$.

▷**22)** Par dérivation de DSE on a $\sum nx^{n-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ et $\sum n(n-1)x^{n-1} = \dfrac{x}{(1-x)^3}$. La loi de X s'obtient en sommant sur toutes les valeurs prises par Y : $P(X=i) = \frac{i+1}{2^{i+2}}$. Les deux lois ne sont pas indépendantes.
Rem : on trouve ce genre de loi en étudiant le « temps de la deuxième réussite » dans une suite infinie de pile ou face.

▷**23)** Comme les A_p sont indépendants, leurs complémentaires le sont aussi. La probabilité de n'être multiple d'aucun nombre premier est (par théorème du cours) la limite du produit des probas de ne pas être multiple de p_n.

▷**24)** $E(\exp(\ell - S)) = \sum\limits_n e^{\ell-n}P(S=n) \geqslant \sum\limits_{n\leqslant \ell} e^{\ell-n}P(S=n) \geqslant \sum\limits_{n\leqslant\ell} P(S=n)$.

▷**25)** Par B-T on trouve $P(X>2m) = P(|X-m|>m) < \frac{V(X)}{m^2} = \frac{1}{m}$. La vraie valeur est bien sûr donnée par le reste d'une série :

$$P(X \geqslant 2m) = \sum_{k\geqslant 2m} e^{-m}\frac{m^k}{k!}$$

▷**27)** Une façon de sommer la famille des $u_{\ell,k}$ donne $\sum_{\ell\geqslant 1} u_{\ell,k} = kp_k$ donc la famille (de réels positifs) est sommable ssi $\sum kp_k$ converge. En sommant dans l'autre sens on trouve $\sum_{k\geqslant 1} u_{\ell,k} = \sum_{k\geqslant \ell} p_k = P(X \geqslant \ell)$.

▷**29)** a) Convexité de la fonction exp. Puis (par exemple) DSE et majoration terme à terme.
b) D'après l'exercice précédent une v.a. bornée a des moments de tout ordre ; par ailleurs on a par croissance de l'espérance

$$E(e^{tX}) \leqslant e^{-t}E(\frac{1-X}{2}) + e^tE(\frac{1+X}{2}) = \operatorname{ch} t \qquad (E(x)=0).$$

c) $E(e^{tS_n}) = \prod E(e^{tX_n}) == \prod E(e^{(ta_n)(X_n/a_n)})$.

▷**30)** Pour démontrer ce théorème, l'idée est de pondérer les valeurs $f(k/n)$ par des coefficients qui dépendent de x, ces coefficients étant distribués de façon plus intense quand $k/n \approx x$. Sergueï Bernstein a eu l'idée de prendre les probabilités d'une distribution binomiale. Ainsi on a des valeurs de $f(k/n)$ qui vont peu intervenir, et pour k/n voisin de x on aura des $f(k/n)$ qui seront, eux, proches de $f(x)$. La première majoration (écraser les $f(k/n)$ pour k/n loin de x) est technique, et on est heureux de pouvoir l'établir simplement grâce à une inégalité issue des probabilités.

$$\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ |x-\frac{k}{n}|\geqslant\alpha}} P(Z_n=k/n)=P(|Z_n-x|\geqslant\alpha)=P(|S_n-nx|\geqslant n\alpha)=P(|S_n-E(S_n)|\geqslant n\alpha)\leqslant\frac{V(S_n)}{n^2\alpha^2}$$

par Bienaymé-Tchébychef. Reste à majorer uniformément $\dfrac{V(S_n)}{n^2}=\dfrac{x(1-x)}{n}\leqslant\dfrac{1}{4n}$ (petite étude de fonction, ou symétrie d'une parabole).

En notant par commodité $p_k=\binom{n}{k}x^k(1-x)^k$, on a $\sum\limits_{k=0}^{n}p_k=1$ (famille complète) et donc $f(x)=\sum p_k f(x)$ ce qui donne la relation voulue.

Ensuite on découpe la somme selon que $|x-\frac{k}{n}|\geqslant\alpha$ ou pas. Dans le premier cas on majore grâce à la question précédente ; dans le deuxième on utilise que $f(x)-f(k/n)$ est petit puisque $|x-\frac{k}{n}|<\alpha$ (continuité uniforme). On recolle et on touille et ça sort ! (fixer $\varepsilon>0$, puis α associé pour la condition de continuité, puis enfin trouver une condition sur n pour que le tout soit $\leqslant 2\varepsilon$).

▷31) Dans $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{t^k}{n}$ c'est k qui varie !

▷32) On se souvient que $P(X_i>n)=q^n$. Alors

$$P(Y>n)=P(\text{tous les }X_i>n)=\prod P(X_i>n)=q^{nN}$$

par indépendance. On en déduit

$$P(Y=n)=q^{(n-1)N}-q^{nN}=q^{(n-1)N}\big(1-q^N\big)$$

càd une loi géométrique de paramètre $p'=q^N$.

▷34) Tous les facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ sont de degré 2, sans qu'il soit besoin de les expliciter.

Les lois de chaque dé ont des fonctions génératrices de la forme $G(X)=XP(X)$ où $P\in\mathbb{R}[X]$ et $d^\circ P=5$.

▷35) Remplacer p par $\lambda/n+o(1/n)$.

▷36) n valeurs sont déterminées par n équations, surtout quand le déterminant du système est un Vandermonde.

▷37) Soit G la fonction génératrice de la loi : $G(t)=\sum a_n t^n$. La fonction de génératrice de la loi de $2X$ est $H(x)=\sum a_n t^{2n}$ et on veut que

$$H(x)=G(x)^2\iff\sum a_n t^{2n}=(\sum a_n t^n)^2=\sum_n\big(\sum_{k=0^n}a_k a_{n-k}\big)t^n$$

On en déduit par PISE le système $\forall n\in\mathbb{N}\ a_n=\sum_{k=0}^{n}a_k a_{n-k}$ avec des $a_n\in[0,1]$. Prendre le plus petit n tel que $a_n>0$ et montrer que c'est 1.

▷38)

$$P(\widetilde{E})=P\Big(\bigcap_{n\geqslant1}\bigcup_{k\geqslant n}E_k\Big)\leqslant\operatorname*{Inf}_n P\Big(\bigcup_{k\geqslant n}E_k\Big)\leqslant\operatorname*{Inf}_n\sum_{k\geqslant n}P(E_k)=0.$$

▷39) On applique le thm de continuité décroissante à l'intersection des $\bar{E}_1\dots\bar{E}_n$. L'inégalité demandée résulte de la convexité de exp. Puis

$$P\Big(\bigcap_n\bar{E}_n\Big)=\prod_n(1-P(E_n))\leqslant\exp\Big(\sum_n-P(E_n)\Big).$$

Avec les chimpanzés, $E_n\sim\mathcal{B}(p)$ avec $p\ll1$!

p est de l'ordre de $1/C^N$ où C est le nombre de caractères du clavier et N le nombre de caractères frappés pour produire le texte. Néanmoins, $\sum p$ est divergente...

L'espérance du premier jour où un chimpanzé y arrive (loi géométrique) est $1/p$, qui tend donc très vite vers l'infini avec N.