Indications – pour ceux qui ont tout essayé...

▷1) Chasser les racines en mettant au carré après les avoir isolées au maximum. Le résultat est un polynôme de degré 8.

▷3) c) : les espaces propres sont en somme directe. Démonstrations plus directes possibles (dériver...).

▷4) Pour le lemme initial, prendre deux vecteurs propres et montrer que la vp est la même en considérant la somme des deux vecteurs.

▷6) a) $42\mathbf{1} + 1961 I_n$.

b) Récurrence $bx_{k-1} + (a-\lambda)x_k + bx_{k+1} = 0$ avec $x_0 = x_{n+1} = 0$ pour pourvoir l'écrire des rangs 1 à n.

c) Essayer $e_1 + e_n$ et d'autres similaires (parité de n ?)

▷7) Ecrire Bezout, appliquer à u puis à des $x \in E$ choisis. Le théorème du rang pourra servir.

▷8) In fine on retrouve le polynôme caractéristique. Les espaces propres sont des droites. L'alogirthme pour calculer une valeur d'un polynôme avec seulement n multiplications est le schéma de Hörner.

▷9) Prendre l'indice tel que x_i est maximal dans le vecteur (colonne) X du noyau, supposé non nul.

▷11) vp de $A = 0, 1, 2$. Pour $B, -3, -1, 1, 3$. On peut ruser en dissociant $e_1 e_3$ et $e_2 e_4$. Pour C, factoriser ! Pour vous aider, noter que $-\sin\varphi$ est vp... regarder la somme des vp aussi.

Pour D, noter que $a - b$ est racine avec un vecteur propre visible sur les colonnes de la matrice... Les autres vecteurs propres sont aussi des combinaisons simples des vecteurs de base.

▷14) Procéder par étape avec des polynômes annulateurs scindés à racines simples (indic : un tel polynôme P est premier avec P').

Deuxième exo : mettre bout à bout deux vecteurs propres de A pour fabriquer un vecteur de taille $2n$. On peut deviner les valeurs propres de B, produits de celles de A par celles de $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

▷16) Diagonaliser bien sûr. On n'est pas obligé de faire le calcul en entier si on passe à la limite car il y a beaucoup de zéros...

▷17) Diagonaliser. Similaire au précédent.

▷18) Il suffit de montrer qu'un barycentre (à coeffs positifs) de deux matrices stochastiques est encore stochastique.

Pour la vp 1 penser à la transposée et à un vecteur simple...

Pour les autres v.p. constater que les puissances d'une telle matrice sont bornées et raisonner par l'absurde (vp $\Rightarrow$ vecteur propre associé...).

▷19) $\operatorname{Ker} u$ est stable par v et la restriction d'un endo diagonalisable à un sev stable est encore diagonalisable donc admet une base de vecteurs propres...

▷20) Pour conclure montrer que toute matrice diagonale est un polynôme en la matrice de u à l'aide de polynômes d'interpolation.

▷21) Raisonner par l'absurde pour montrer que les facteurs $u^2 + au + b\,\mathrm{id}$ dans $\mu_u(u)$ sont non injectifs.

▷22) Les combinaisons des parties réelles et imaginaires de P conviennent. Le déterminant indiqué est un polynôme réel qui ne s'annule pas en $i \in \mathbb{C}$...

▷23) Montrer déjà que $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^2$ (par l'absurde, sinon le minimal contiendrait X^2 pas X).

▷24) Déjà trigonaliser (on peut retrancher I_3 et trouver une matrice nilpotente pour appliqer la recette du cours).

▷25) a) facile en diagonalisant

b) la difficulté est l'unicité, cf. 20.

c) nilpotent c'est vraiment le contraire de diagonalisable. . .

▷**26)** Pour les puissances ici on peut retrancher une matrice très simple et utiliser la formule du binôme. . .

▷**27)** Quand on peut diagonaliser c'est facile. Là on trigonalise et on essaye de raisonner sur un éventuel plan stable. . . (les droites, c'est frocément avec des vecteurs propres).

▷**28)** Prendre le bon critère et utiliser qu'on est dans $\mathbb{C}$, et pas dans $\mathbb{R}$. . .

▷**29)** Essayer $n = 2$, conjecturer et prouver par récurrence. Pour b) observer qu'il existe un vecteur tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$. Le c) peut se faire par un calcul bourrin. Ou on peut ruser en regardant ce qui arrive aux vecteurs de la base du b).

▷**30)** Supposer qu'il y a des vp non nulles. Considérer les multiplicités des vp non nulles comme des inconnues dans le système qu'on obtient en trigonalisant pour calculer les traces. On reconnaîtra un Vandermonde.

▷**31)** Garder la tête froide en sachant bien dans quel espace on fait tel calcul. Comemncer par élucider qui est $\operatorname{Ker} U$ à l'aide de $\operatorname{Ker} u$ (attention ! l'un est dans $\mathcal{L}(E)$ et l'autre dans E).

▷**33)**

c) Un sev de dimension finie (genre $\mathbb{K}[A]$) est. . .

e) A_k^2 est simple. Diagonaliser A_k donne un résultat encore plus simple.