Indications – pour ceux qui ont tout essayé...

▷**1)** L'application nulle est dérivable en tout point !

▷**4)** $f(1+1+\ldots 1)$ puis $qf(\frac{p}{q}x)$. Tout nombre positif est un carré dans $\mathbb{R}$.
Il existe des automorphismes non continus de $\mathbb{C}$, mais il est des secrets qui doivent rester cachés...

▷**7)** Une somme sur $g \in G$ est la même à l'ordre près qu'une somme indexée par $f \circ g, g \in G$.
$\forall x \in E, g \circ p \circ g^{-1}(x) \in F$. Tout élément de F est invariant par p.
Pour calculer $q \circ q$ on remplace UN terme seulement par la définition, pour l'autre on laisse q afin d'utiliser ce qui précède.

▷**8)** Δ est nilpotent. Il faut vérifier que L est bien un endo !

▷**11)** Il suffit de montrer la stabilité par les trois lois.

▷**12)** $u - \lambda_1 \mathrm{id}$ zigouille x_1 et multiplie x_i par $\lambda_i - \lambda_1 \neq 0$. Itérer.

▷**13)** Je propose 6 méthodes :
1. En résolvant formellement le système $Y = TX$.
2. En utilisant la notion de *drapeau* stable : il y a un suite de sev E_k de dimension $k = 1 \ldots n$ tels que $E_k \subset E_{k+1}$ et chacun est stable par l'endomorphisme associé à T.
3. L'application $M \to TM$ est linéaire injective sur l'algèbre des matrices triangulaires, d'où surjective.
4. T^{-1} est un polynôme en T.
5. Raisonner par récurrence en considérant des matrices triangulaires par blocs.
6. La comatrice d'une matrice triangulaire est aussi triangulaire.

▷**14)** En dim finie condition de dim.
En dim infinie il faut que G soit isomorphe à un supplémentaire de F.

▷**15)** $u^{n+1} = u \circ u^n$ ou $u^n \circ u$. Ça dépend de la question...
En dimension infinie on peut montrer que les deux composantes sont supplémentaires par la définition.
On veut écrire $x \in E$ sous la forme $u^r(y) + (x - u^r(y))$ avec $(x - u^r(y))$ dans K_r, trouver y en conséquence en utilisant que $J_{2r} = J_r$.

▷**16)** À savoir faire. On applique f^{n-1} à la combinaison linéaire égale à 0.

▷**17)** $f^2(x)$ est proportionnel à $f(x)$ car tous les vecteurs images sont colinéaires. De plus $f(x)$ engendre Im sauf si $x \in$ Ker.

▷**18)** Dans l'exemple on trouve un sev de dim 2 (engendré par I, M).

▷**19)** Déjà $u^2 = 0 \iff \operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$.

▷**20)** Si $\operatorname{Ker} f \neq \operatorname{Ker} f^2$ montrer qu'il existe un $x \in E$ tel que $f(x) \neq 0 = f^2(x)$ et montrer (en factorisant P) qu'alors $P(f)(x) \neq 0$, absurde (x et $f(x)$ doivent être indépendants).

▷**21)** Un sens est trivial. On fait une récurrence sur $p = \dim E - \dim F = \dim E - \dim G$. Trivial si $p = 0$ (!). Si $p = 1$, on a deux hyperplans. Leur réunion n'est pas E donc il existe un vecteur a qui n'est ni dans F ni dans G, il engendre une droite supplémentaire commun.
Si on a deux sev F, G de codimension p, on leur rajoute un vecteur a qui n'est ni dans l'un ni dans l'autre et on obtient $F' = F \oplus \mathbb{K}.a, G' = G \oplus \mathbb{K}.a$ qui sont deux sev de même codimension $p-1$ et par HR possèdent un supplémentaire commun S. Alors $S \oplus \mathbb{K}.a$ devrait convenir.