Indications pour débloquer

SEULEMENT SI VOUS AVEZ LONGUEMENT CHERCHÉ...

3) $\sum_{\substack{n=1\\n\neq p}}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2-p^2}$, $p\in\mathbb{N}^*$: après D.E.S., écrire les quatre sommes obtenues en listant terme à terme. Résultat $\dfrac{3}{4p^2}$.

$\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor-\lfloor\sqrt{n}\rfloor=0$ sauf si $n+1$ est un ...

$\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1},\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$: écrire $\dfrac{1}{n+1}=\int_0^1 t^n\,dt$ et trouver que la somme partielle est une intégrale de la somme d'une progression géométrique. Séparer en deux morceaux, l'un constant et l'autre qui tend vers 0.

$\arctan\dfrac{2}{n^2}=\arctan\dfrac{1}{n-1}-\arctan\dfrac{1}{n+1}$ (le prouver est plus facile que le trouver...)

$\sin\frac{1}{n(n+1)}=\sin\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$.

$\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{n}{2^n}=\sum_{n\geqslant 0}nx^n$ avec $x=1/2$. Une méthode élémentaire consiste à écrire

$$\begin{array}{rl} s_n = x+x^2+x^3+x^4+\dots x^n & +\\ x^2+x^3+x^4+\dots x^n & +\\ x^3+x^4+\dots x^n & +\\ \vdots & +\\ x^n & \end{array}$$

Parité de $\binom{n}{2}$ selon le résidu de n modulo 4.

$$\coth x-2\coth 2x=\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}-\frac{2\operatorname{ch}2x}{\operatorname{sh}2x}=\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}-\frac{2\operatorname{ch}^2x-1}{2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x}=\frac{1-\operatorname{ch}^2x}{2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x}=\dots$$

4) À chaque étape on divise les p portions restantes en 2, créant $2p$ parts tant que $2p<5$. Dès que le nombre de parts dépasse 5 (strictement) on distribue 5 parts et on itère sur le reste qui fait donc toujours moins de 5. On retombe forcément sur un nombre de parts déjà obtenu vu que le nombre de possibilités est fini.

5) Somme géométrique. Repassez quand même à la partie réelle !

6) $\sqrt[3]{n^3+an}-\sqrt{n^2+3}$: diffère selon que $a=9/2$ ou pas.

$\tan(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n})=\tan\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\times\dots$

$\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^\alpha}=\exp(n^\alpha\times\ln(1-\frac{1}{3n^2}+o()))$.

$\dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}=e^{\cdots}$ qui permet d'évaluer n^2u_n.

$x=\operatorname{Arc}\cos(1-y)\iff\cos x=1-y\iff x^2/2\sim y$.

$n^{3/2}$ pour une fois...

8) $2ab\leqslant a^2+b^2$.

9) Soigner l'étude de la suite récurrente ! Ensuite, $\dfrac{f(x^n)-f(1)}{x^n-1}$ tend vers une dérivée.

10) Par le TSA on a $|R_n(x)|\leqslant x^{2^{(n+1)}}$ donc on rend ce reste inférieur à ε quand $n+1\geqslant\ln\dfrac{-10\ln 10}{\ln x}/\ln 2$. Le programme suivant marche [je rajoute une louche à n_x], on voit que la fonction oscille de plus en plus vite avec un écart qui ne tend pas vers 0.

```
def f(x):
    s,n=0,0
    while n < 2+2*math.log(-10/math.log(x)):
        s += (-1)**n*x**(2**n)
```

```
        n+=1
    return s

X = np.arange(0.999, .99999, 0.00001)
Y = [ f(x)-0.5 for x in X ]
plt.plot(X, Y)
plt.show()
```

11) Faire un DL aux puissances de $1/n$ de $v_{n+1} - v_n$.

13) Encadrer $\sum_{k \geqslant n} \dfrac{1}{k^2}$ (entre $1/n$ et $1/(n-1)$).

14) On trouve $u_n - \dfrac{1}{(n(n+1)} \sim \dfrac{2}{n^3}$ d'où en sommant de $n+1$ à l'infini $R_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} + \dots$.
Ensuite écrire $\dfrac{\ln k}{k(k+1)} = \dfrac{\ln k}{k} - \dfrac{\ln k}{k+1}$, écrire une somme partielle, réindexer : on se ramène au cas précédent.

15) Poser $v_n = u_n^{-2}$ et considérer les sommes partielles de la série (divergente !) $\sum(v_n - v_{n-1})$. Appliquer l'exo 12.

16) Utiliser des intégrales.

18) Pour l'irrationalité de e, raisonner en supposant que $e = m/n$ et utiliser l'encadrement $u_{n+1} < e < v_{n+1}$. Multiplier par ce qu'il faut pour avoir des entiers et une contradiction.

19) $(\dfrac{n}{n+1})^{n^2} = e^{\cdots}$.
$\dfrac{\ln n}{n}$ finit par décroître...
$\sin\big(\pi(2+\sqrt{3})^n\big)$ n'est pas si différent de $\sin\big(\pi(2-\sqrt{3})^n\big)$.
Pour les séries alternées, soit le critère spécial, soit la non DVG peuvent mériter une preuve détaillée...
Dernier : pour évaluer $s_{3n+3} - s_{3n}$, utiliser un DL de $\dfrac{1}{(n+1)^\alpha} = n^{-\alpha}(1+\frac{1}{n})^{-\alpha}$.

20) Considérer la série $\big(\sum(\ln u_n - \ln u_{n-1})\big)$...

22) $u_n - \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha} \sim \dfrac{+1}{n^{2\alpha}}$ et ça c'est positif, Madame !

23) On sera amené à (re)trouver un équivalent du reste de $\sum 1/n^2$, par comparaison à une intégrale ou à $\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$.

24) Pour calculer $\sum \cos(kt)$ il est malin de multiplier par $2\sin\frac{t}{2}$. Pour montrer que h est $\mathcal{C}^1$ on peut arguer que $\dfrac{u}{\sin u}$ est $\mathcal{C}^\infty$ (au voisinage de 0). Et même plus. Sinon pas facile de justifier que la dérivée en 0, non seulement existe, mais **est continue** en 0...

25) On peut utiliser le développement $H_n = \ln n + \gamma + O(\frac{1}{n})$ obtenu en 23. Ou utiliser (en justifiant...) le TSA :

$$\frac{H_n}{n} - \frac{H_{n+1}}{n+1} = \frac{H_n}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)^2} > 0 \quad \text{pour } n \text{ assez grand.}$$

Le produit de Cauchy demandé est la série $\big(\sum_n (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k(n-k)}\big)$. Or $\sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k(n-k)} = 2\dfrac{H_{n-1}}{n}$ par une décomposition en éléments simples.

27) La relation est $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$. Encadrer I_{n-1}. Prouver que nI_nI_{n-1} est constante.

29) Factoriser et réécrire à coups de factorielles et de puissances de 2.

30) $u_n = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$ par Stirling.

31) Le nœud du calcul est l'évaluation de $\big(\frac{n}{2} \pm x\sqrt{n}\big)!$ par la formule de Stirling. Il faut arranger $\big(\frac{n}{2} \pm x\sqrt{n}\big)^{\frac{n}{2} \pm x\sqrt{n}}$ en factorisant $\frac{n}{2}$. Le résultat final est $\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-2x^2}$.

32) Introduire $\ell < k < 1$ et arguer que $\sqrt[n]{|u_n|} \leqslant k$ pour n assez grand.

33) Pour $\alpha > 1$ comparer à $1/n^\beta$ où $1 < \beta < \alpha$. L'intégrale $\int_2^\infty \frac{dt}{t \ln t}$ diverge par primitivation directe.

34) $|v_n| = \dfrac{1}{n(n+1)}$. Exprimer les sommes partielles s_n de $\sum u_n$ en fonction des sommes partielles t_n de $\sum v_n$.

35) Traiter séparément n pair ou impair. On trouve la moitié du TG.

36) Une fois la formule obtenue (c'est facile par récurrence, mais possible aussi par regroupements habiles), utiliser librement le développement obtenu en cours ou en **23** :

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$$

37) **2a)** : symétrie du triangle de Pascal. **2b)** : couper la somme en 2 pour retirer la valeur absolue et utiliser le **a)**.

38) b) : si $x = p/q$ alors la suite est q-périodique. Réciproquement si la suite est q-périodique et prend les valeurs (pour fixer les idées) 101101 101101 101101 ... alors en moyenne on calcule facilement $\lim \dfrac{S_0 + \ldots S_n}{n} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{p}{q}$ en général où p est le nombre de 1 dans une période.

c) : il suffit de fabriquer une suite de 0, 1 qui ne converge pas en moyenne, par ex 0100111100000000111111111

39) Dénombrabilité : on peut voir l'image de $\mathbb{N}^2$, dénombrable, ou même voir une bijection avec $\mathbb{N}^2$ (le démontrer avec $b/a \notin \mathbb{Q}$).

* Énumération : si on a $ax + by \leqslant M$ alors a et b sont bornés. Donc $A \cap [0, M]$ est toujours fini ; on peut donc ordonner les éléments de A inférieurs à M, donc ordonner A. On peut aussi donner une preuve sous forme d'un algorithme (chercher l'élément suivant, le point essentiel est qu'il y a un nombre fini d'étapes).

** Distances consécutives : elles sont de la forme $\alpha x + \beta y$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. On peut utiliser la densité du groupe constitué des nombres de cette forme ou tenter un raisonnement par l'absurde (donné à l'ENS...).

NB : à un moment donné, la quantité $\alpha_{n+1} - \alpha_n$ ne peut prendre que trois valeurs $0 < u < v < w$. Quant une quatrième valeur w' apparaît, w n'apparaît plus et on a $w' = v - u < u$ (3 gaps Theorem). De plus les séquences de ces intervalles sont riches en palindromes (Norman Carey, 2011).

41) $(m+n)!$ est divisible par $m!n!$.

42) Sommer par paquets selon le nombre de chiffres. Majorer chaque paquet.

44) CV absolue pour $x > 0$. La différence des sommes de séries géométriques se simplifie (et devient définie en $x = 0$).

45) Notation préférable : $\left(\sum\limits_{n \geqslant 1} n^{-x}\right)^2 = \sum\limits_{p \geqslant 1} p^{-x} \sum\limits_{q \geqslant 1} q^{-x}$.

46) Pour la convergence se souvenir que $f_n \sim C^{te} \times \Phi^n$.

L'ensemble défini par $\{t \in \mathbb{C} \mid |t(t+1)| \leqslant 1\}$ est l'intérieur d'une ovale de Cassini, ne cherchez pas à la reconnaître plus. Cela contient le disque de rayon $1/\Phi$ obtenu par ailleurs.

47) Reconnaître des produits de Cauchy.

48) Même paquets qu'en **42** (nombres ayant p chifffres, i.e. $10^{p-1} \leqslant n < 10p - 1$). La somme de chaque paquet est télescopique.

49) Dans un sens de sommation ça fait du ζ, dans l'autre ça fait l'autre membre. Pour la série alternée, mettre à part les termes en $\pm 1/n$ qui annihileraient la sommabilité.

50) $\dfrac{1}{a^2b + ab^2 + 2ab} = \dfrac{1}{ab(a+b+2)}$ peut se décomposer en éléments simples, par exemple par rapport à la variable a. En sommant par tranches, on se ramène à sommer $\dfrac{H_{n+2}}{n(n+2)} = \dfrac{H_{n+2}}{n} - \dfrac{H_{n+2}}{n+2}$. En réindexant les sommes partielles, on se ramène à une série télescopique de fractions rationnelles. Réponse 7/4.

52) Déjà bien capter que (x_n^p) n'est pas une puissance... Développer le carré de la différence et ça roule.

53) Majorer tout ce qui bouge par $\prod\limits_{n \geqslant 0} (1 + |u_n|)$ après avoir prouvé (ln...) que cette chose a une valeur finie. Après, un produit partiel $\prod_{n \geqslant N} (1 + u_n)$ est un paquet de termes de la forme $u_{n_1} u_{n_2} \ldots u_{n_k}$

où $0 \leqslant n-1 < n_2 \ldots < n_k \leqslant N$ donc cela converge, vers la somme de la famille (dont on a établi la sommabilité). C'est le théorème d'absolue convergence d'un produit. Bien plus facile à prouver dans le cas réel : en effet si les (u_n) sont réels et si $\sum |u_n|$ converge alors on a $|\ln(1+u_n)|$ qui est défini pour n assez grand, tend vers 0 et est équivalent à un TGSCV !

54) Poser $w_{n,k} = u_{n,k} - u_{n-1,k}$ et se ramener ainsi à une série double.

$$\text{Astuce finale :} \qquad \left(\frac{1}{n}\right)^n + \left(\frac{2}{n}\right)^n + \ldots \left(\frac{n}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{n-k}{n}\right)^n$$