Indications pour débloquer

SEULEMENT SI VOUS AVEZ LONGUEMENT CHERCHÉ...

3 $\sum_{\substack{n=1\\n\neq p}}^{+\infty} \frac{1}{n^2-p^2}$, $p \in \mathbb{N}^*$: après DES, écrire les quatre sommes obtenues en listant terme à terme. Résultat $\frac{3}{4p^2}$.

$\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{n}\rfloor = 0$ sauf si $n+1$ est un ...

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$: écrire $\frac{1}{n+1} = \int_0^1 t^n \, dt$ et trouver que la somme partielle est une intégrale de la somme d'une progression géométrique. Séparer en deux morceaux, l'un constant et l'autre qui tend vers 0.

$\arctan \frac{2}{n}^2 = \arctan \frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n+1}$ (le prouver est plus facile que le trouver...)

$\sin \frac{1}{n(n+1)} = \sin\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$.

$\sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{2^n} = \sum_{n\geqslant 0} nx^n$ avec $x = 1/2$. Une méthode élémentaire consiste à écrire

$$\begin{array}{rl} s_n = x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots x^n & + \\ x^2 + x^3 + x^4 + \dots x^n & + \\ x^3 + x^4 + \dots x^n & + \\ \vdots & + \\ x^n & \end{array}$$

Parité de $\binom{n}{2}$ selon le résidu de n modulo 4.

$$\coth x - 2\coth 2x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} - \frac{2\operatorname{ch} 2x}{\operatorname{sh} 2x} = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} - \frac{2\operatorname{ch}^2 x - 1}{2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x} = \frac{1-\operatorname{ch}^2 x}{2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x} = \dots$$

4 À chaque étape on divise les p portions restantes en 2, créant $2p$ parts tant que $2p < 5$. Dès que le nombre de parts dépasse 5 (strictement) on distribue 5 parts et on itère sur le reste qui fait donc toujours moins de 5. On retombe forcément sur un nombre de parts déjà obtenu vu que le nombre de possibilités est fini.

6

$\sqrt[3]{n^3+an} - \sqrt{n^2+3}$: diffère selon que $a = 9/2$ ou pas.

$\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}) = \tan\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n} \times \dots$

$\left(n \sin \frac{1}{n}\right)^{n^\alpha} = \exp(n^\alpha \times \ln(1 - \frac{1}{3n^2} + o()))$.

$\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n} = e^{\cdots}$ qui permet d'évaluer $n^2 u_n$.

$x = \operatorname{Arc}\cos(1-y) \iff \cos x = 1-y \iff x^2/2 \sim y$.

$n^{3/2}$ pour une fois...

8 $2a \times b \leqslant a^2 + b^2$.

9 $\frac{f(x^n) - f(1)}{x^n - 1}$ tend vers une dérivée.

10 Faire un DL aux puissances de $1/n$ de $v_{n+1} - v_n$.

12 Encadrer $\sum_{k\geqslant n} \frac{1}{k^2}$ (entre $1/n$ et $1/(n-1)$).

15 Utiliser des intégrales.

Pour l'irrationnalité de e, raisonner en supposant que $e = m/n$ et utiliser l'encadrement $u_{n+1} < e < v_{n+1}$. Multiplier par ce qu'il faut pour avoir des entiers et une contradiction.

16 $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} = e^{\cdots}$.

$\frac{\ln n}{n}$ finit par décroître...

$\sin\big(\pi(2+\sqrt{3})^n\big)$ n'est pas si différent de $\sin\big(\pi(2-\sqrt{3})^n\big)$.

Pour les séries alternées, soit le critère spécial, soit la non DVG peuvent mériter une preuve détaillée...

Dernier : pour évaluer $s_{3n+3}-s_{3n}$, utiliser un DL de $\dfrac{1}{(n+1)^\alpha}=n^{-\alpha}(1+\frac{1}{n})^{-\alpha}$.

20 Pour calculer $\sum\cos(kt)$ il est malin de multiplier par $2\sin\frac{t}{2}$. Pour montrer que h est $\mathcal{C}^1$ on peut arguer que $\dfrac{u}{\sin u}$ est $\mathcal{C}^\infty$ (au voisinage de 0).

22 La relation est $I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$. Encadrer I_{n-1}. Prouver que nI_nI_{n-1} est constante.

24 Factoriser et réécrire à coups de factorielles et de puissances de 2.

26 Le nœud du calcul est l'évaluation de $\left(\frac{n}{2}\pm x\sqrt{n}\right)!$ par la formule de Stirling. Il faut arranger $\left(\frac{n}{2}\pm x\sqrt{n}\right)^{\frac{n}{2}\pm x\sqrt{n}}$ en factorisant $\frac{n}{2}$.

27 Introduire $\ell<k<1$ et arguer que $\sqrt[n]{|u_n|}\leqslant k$ pour n assez grand.

29 $|v_n|=\dfrac{1}{n(n+1)}$. Exprimer les sommes partielles s_n de $\sum u_n$ en fonction des sommes partielles t_n de $\sum v_n$.

30 Traiter séparément n pair ou impair.

31 Une fois la formule obtenue, utiliser librement le développement obtenu en cours

$$H_n=\ln n+\gamma+\frac{1}{2n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

33 Dénombrabilité : on peut voir l'image de $\mathbb{N}^2$, dénombrable, ou même voir une bijection avec $\mathbb{N}^2$ (le démontrer avec $b/a\notin\mathbb{Q}$).

* Énumération : si on a $ax+by\leqslant M$ alors a et b sont bornés. Donc $A\cap[0,M]$ est toujours fini ; on peut donc ordonner les éléments de A inférieurs à M, donc ordonner A. On peut aussi donner une preuve sous forme d'un algorithme (hercher l'élement suifant, ke point essentiel est qu'il y a un nombre fini d'étapes).

** Distances consécutives : elles sont de la forme $\alpha x+\beta y$ avec $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$. On peut utiliser la densité du groupe constitué des nombres de cette forme ou tenter un raisonnement par l'absurde (donné à l'ENS...).

NB : à un moment donné, la quantité $\alpha_{n+1}-\alpha_n$ ne peut prendre que trois valeurs $0<u<v<w$. Quant une quatrième valeur w' apparaît, w n'apparaît plus et on a $w'=v-u<u$ (3 gaps Theorem). De plus les séquences de ces intervalles sont riches en palindromes (Norman Carey, 2011).

35 $(m+n)$ est divisible par $m!n!$.

36 Sommer par paquets selon le nombre de chiffres. Majorer chaque paquet.

39 Notation préférable : $\Big(\sum\limits_{n\geqslant1}n^{-x}\Big)^2=\sum\limits_{p\geqslant1}p^{-x}\sum\limits_{q\geqslant1}q^{-x}$.

40 Pour la convergence se souvenir que $f_n\sim C^{te}\times\Phi^n$.

L'ensemble défini par $\{t\in\mathbb{C}\mid|t(t+1)|\leqslant1\}$ est l'intérieur d'une ovale de Cassini, ne cherchez pas à la reconnaître plus. Cela contient le disque de rayon $1/\Phi$ obtenu par ailleurs.

41 Reconnaître des produits de Cauchy.

42 Même paquets qu'en **36** (nombres ayant p chifffres, i.e. $10^{p-1}\leqslant n<10p-1$). La somme de chaque paquet est télescopique.

43 Dans un sens de sommation ça fait du ζ, dans l'autre ça fait l'autre membre. Pour la série alternée, mettre à part les termes en $\pm1/n$ qui annihileraient la sommabilité.

44 $\dfrac{1}{a^2b+ab^2+2ab}=\dfrac{1}{ab(a+b+2)}$ peut se décomposer en éléments simples, par exemple par rapport à la variable a. Je comprends la demande de généralisation comme une tentative de changer 2 en p.

46 Déjà bien capter que (x_n^p) n'est pas une puissance... Développer le carré de la différence et ça roule.

47 Majorer tout ce qui bouge par $\prod\limits_{n\geqslant0}(1+|u_n|)$ après avoir prouvé (ln...) que cette chose a une valeur finie.

48 Poser $w_{n,k} = u_{n,k} - u_{n-1,k}$ et se ramener ainsi à une série double.

$$\left(\frac{1}{n}\right)^n + \left(\frac{2}{n}\right)^n + \dots \left(\frac{n}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{n-k}{n}\right)^n$$