Indications

2) $f_n(x) = \dfrac{\sin^2 nx}{n \sin x}$: regarder près de 0 pour minorer le sup.

$\dfrac{\sin nx}{n\sqrt{x}}$: on peut majorer sin de deux façons (au moins)...

$n \cos^n x \sin x$ est “pas trop petit” au voisinage de $\pi/2$ plutôt que de 0.

$\int_0^x g(t^n)\,dt$: $g(t^n)$ va être proche de $g(0)$ sur le plus gros de l'intervalle.

$\sum_{p=0}^{n} \dfrac{(-1)^p x^{p+1}}{p+1} - \ln(1+x)$: reste d'une série, expression intégrale.

5) Poser $a_{n,k} = 0$ pour $k > n$, cela simplifie les calculs. Utiliser la monotonie à k fixé.

6) L'étude de la suite récurrente (x fixé ne devrait pas être difficile (monotonie, point fixe...). Ensuite majorer $\dfrac{u_n - \sqrt{x}}{u_{n-1} - \sqrt{x}}$ grâce au TAF. Itérer mais seulement à partir de $n = 2$.

7) Dans le cas discret, diviser par le plus gros terme.

Dans le cas continu, minorer $\int_a^b |f|^p$ par $\int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} (\|f\|_\infty - \varepsilon)^p$.

8) Sup d'un polynôme sur $\mathbb{R}$??? Étudier $\|P_n - P_{n+1}\|_\infty$.

9) Suivre l'indication. Avec la monotonie (y compris de f, à établir) on obtient $f_n(x) - f(x) \leqslant f_n(a_i) - f(a_{i-1}) \leqslant f_n(a_i) - f(a_i) + \varepsilon$ et de même pour minorer. Après on a par CV simple $\forall i = 1 \dots N, f_n(a_i) - f(a_i) \leqslant \varepsilon$ à partir d'un certain rang.

10) Si $x_{n_p} \to x$ on utilise la CV au point x : $|f_{n_p}(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$ pour $p \geqslant P$. Après

$$\|f - f_{n_p}\|_\infty = |f(x_{n_p}) - f_{n_p}(x_{n_p})| \leqslant |f(x_{n_p}) - f(x)| + |f(x) - f_{n_p}(x)| + |f_{n_p}(x) - f_{n_p}(x_{n_p})|$$

et on utilise la continuité des deux applications. On finit en notant que la suite $\|f - f_n\|_\infty$ est décroissante.

11) Truc : multiplier par $\sin \frac{x}{2}$. On peut encadrer

$$x - \frac{x^3}{3!} \leqslant \sin x \leqslant x \qquad \forall x \geqslant 0$$

13) Ne pas hésiter à estimer les sups grâce à des valeurs ou limites particulières.

Un $(-1)^n$ n'oblige pas à utiliser le TSA... Celui-ci s'applique bien à $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{nx + (-1)^n}$ mais pas sur $]0, +\infty[$. Voir si on trouve néanmoins une majoration du reste...

$\sum \dfrac{x^{2^n}}{1 - x^{2^{n+1}}}$: dans le doute on revient à la définition...

$e^{-x\sqrt{n}}$: CV par un procédé très très banal, qui marche, si si ! Équivalent : comparer à des intégrales.

15) La série est télescopique donc la CVS est facile. Il est facile aussi de calculer $\int u_n$. Cet exercice fournit un contre-exemple à l'ITàT, on en déduit qu'il n'y a pas CVU.

16) Poser $M = \|f_0\|$ et majorer $|f_n(x)|$ par un polynôme. On trouve ensuite F par une équation différentielle très simple.

18) Utiliser la deuxième partie du TSA.

19) La CVN ne s'applique qu'aux séries, pas aux suites ; mais étudier la suite (f_n) est équivalent à étudier la série $(\sum f_n - f_{n-1})$...

Pour majorer $|\prod(1 + |q^n\|\alpha|)|$ passer aux logarithmes.

20) Majorer un reste grâce au TSA.

À défaut de théorème d'interversion, on montrer que l'intégrale du reste de la série tend vers 0, à la main.

21) Utiliser le TSA à fond.

22) Développer $\ln(1-t)$ et étudier la série qui apparaît.

23) Que vaut $\int f \times P$ pour un polynôme P ? Remplacer P par une suite (P_n) qui tende vers f.

24) Si $f = P \in \mathbb{R}[X]$ on calcule facilement $\int_0^1 nt^n P(t)\,dt \to P(1)$ en écrivant P comme une combinaison linéaire de puissances de t. Dans le cas général, estimer $|f(1) - \int_0^1 nt^n f(t)\,dt|$ en faisant apparaître $P(1)$ et $\int_0^1 nt^n P(t)\,dt$.

26) La CVU n'est pas immédiate. Pourtant $f_n - f$ est une fonction croissante, mais ce n'est pas facile à prouver ! Cet exercice sera bien plus facile avec le thm de convergence dominée...

28) On peut au moins minorer $|\ln(1 - e^{-nx}|$ par e^{-nx}. Cela permet de trouver la limite en 0^+. Pour $+\infty$ on peut passer par une série double et majorer $\dfrac{1}{e^{kx}-1} \leqslant \dfrac{1}{kx}$.

29) Pour μ on peut utiliser le TSA, mais attention aux conditions de décroissance de $|\mathrm{TG}|$.

30) Le TSA n'est utile que pour définir f, après on a de la CVN sur $[\alpha, +\infty[$.

Pour la relation, écrire $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dots$.

Pour les équivalents, utiliser le TSA pour obtenir des encadrements de f.

31) Montrer par un DL que $a_n = O(1/n^2)$, en déduire que e^{b_n} converge puis un équivalent de u_n. Suite plutôt pour 5/2, avec notamment le DSE

$$(1-t)^x = \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)t^n}{n!} \qquad \forall t \in]-1, 1[.$$

32) Refaire l'exo sur la convergence de la suite récursive $u_{n+1} = \sin u_n$. Ensuite utiliser le TSA.

33) Encadrer $e^{-n^2 t^2}$ par deux intégrales, au hasard entre n et $n \pm 1$.

34) Déjà réduire l'intégrale à $[0, \pi/2]$. En intégrant TàT, on est amené à recalculer les intégrales de WALLIS d'indice pair.

35) Cet exercice commence par l'exercice 5.

Ensuite on utilise que

$$\exp\left(\frac{A}{p}\right) = I + \frac{A}{p} + \frac{\varepsilon_p}{p} \quad \text{où } \varepsilon_p \to 0$$

et un DL encore plus long pour la dernière formule.

Celle-là fait apparaître le *crochet de Lie* $[A, B] = AB - BA$ qui est une multiplication (associative, mais pas commutative). On s'en sert pour montrer que si $A, B \in \mathcal{M}$ alors (avec un passage à la limite) $A + B$ et $[A, B]$ itou.