Indications – pour ceux qui ont tout essayé par eux-mêmes

1 Considérer u_{6n}, se souvenir du lemme sur les sous-suites paires et impaires.

2 Trouver les intervalles stables les plus grands possibles (deux).
Cet exercice change de physionomie si on pose $u_0 = \cos\theta\ldots$ (ou $\pm \operatorname{ch} t$ selon le cas).

3 Ceci découle du lemme de l'échelle dans le chapitre des séries. La démonstration à la main consiste à fixer $\varepsilon > 0$; en déduire un certain N ; découper la somme qui constitue $v_n - \ell$ au bon endroit et majorer successivement les deux morceaux ainsi obtenus par eps.

4 $\alpha = -2$ convient (DL de sin et de $(1+t)^\alpha$) Il vient $u_n \sim \sqrt{\dfrac{3}{n}}$.

5 Proba de ne jamais être choisi(e) ? Puis DL.

8 $\arg z_n = \dfrac{\arg z_{n-1}}{2}$. Multiplier par $2^n \sin \frac{t}{2^n}$.

9 Le plus simple est sans doute d'établir qu'il existe deux constantes (non précisées) λ, μ telles que $f_n = \lambda\Phi_n + \mu(-1/\Phi)^n$. Il faut quand même justifier que $\lambda \neq 0$!

10 La méthode connue pour les récurrences d'ordre 2 suggère de chercher des suites géométriques vérifiant la récurrence. Leur raison est racine de l'équation caractéristique $\lambda^3 = \lambda^2 + 1$, qui a trois racines. Trois suites géométriques indépendantes forment une base de l'espace des solutions (puisque chaque suite est déterminée par ses trois valeurs initiales) et donc v_n s'écrit

$$v_n = a\lambda^n + b\mu^n + c\nu^n$$

avec a, b, c arbitraires. Comme les trois racines valent $1.46557, -0.232786 \pm 0.792552i$ et que les deux racines complexes sont de module < 1 le résultat s'ensuit (noter que $a \neq 0$ puisque $v_n \to \infty$).

11 $\cos\theta$ est une combinaison linéaire de 1 et de $5 + 4\cos\theta$.
Pour simplifier la fin on peut remarquer que
- — comme la suite est bornée (le prouver !) le terme en $(-2)^n$ est forcément nul, et
- — exprimer une relation entre u_0, u_1 sans essayer mordicus de les calculer.

12 Faire petit à petit : $u_n > 0, u_n \leqslant 1/n, u_n \sim 1/n\ldots$.

13 Si on calcule de manière exacte (en type rationnels) la suite converge vers 6.
À cause d'erreurs d'arrondi elle bifurque à un moment (cela dépend de la précision des calculs internes à votre calculatrice) et repart pour converger vers 100...
En fait on pose $a_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ avec p_n, q_n des entiers et on vérifie que $q_n = p_{n-1}$ puis que p_n vérifie une récurrence linéaire qui se résout en $p_n = \alpha 5^n + \beta 6^n + \gamma 100^n$. La moindre approximation dans le calcul fait apparaître un coefficient $\gamma \neq 0$ et alors...

14 Montrer l'égalité par récurrence. Pour montrer que la limite commune est ln 2, il faudra utiliser des intégrales.

15 On constate que $f_0 + f_1 + \ldots f_n = f_{n+2} - 1$. Récurrence.

16 Lemme facile par récurrence.
Fourier : une remarque plutôt qu'une indic. Les fonctions $e^{-2i\pi kx/n}$ forment une base de E (il y en a n et elles sont indépendantes), pas étonnant que f puisse s'exprimer comme une combinaison linéaire d'elles.

17 Je n'ai pas de démonstration évidente, on peut procéder élémentairement en partant d'égalités comme

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(2kt) = \frac{\sin((2n+1)t}{2\sin t}$$

ou pire

$$\frac{\sin^2(nt)}{\sin^2 t} = n + 2\sum_{k=1}^{n}(n-k)\cos(2kt)$$

et calculer longuement...