Indications – pour ceux qui ont tout essayé...

▷**1)** a) Ce sup vaut en fait $\mathrm{Max}(|x|, |x+y|)$ donc la boule est un parallélogramme limité par les droites $x = \pm 1, x+y = \pm 1$.

b) Ici on trouve $\pm(x + \frac{y}{2})$ ou $\pm\left(\int_0^{-x/y} x + ty\,dt - \int_{-x/y}^{1} x + ty\,dt\right)$. Ce dernier cas donne des bouts d'ellipse pour la boule.

c) Astuce : $\dfrac{x+ty}{1+t^2}$ atteint la valeur 1 sans la dépasser quand la droite, graphe de la fonction $t \mapsto x + yt$ et la parabole, graphe de $t \mapsto 1+t^2$, sont tangentes. On trouve une boule qui est intersection de deux paraboles.

d,e) : P.S. Pour e) on peut aussi remarquer (on peut, si si...) que c'est $|x - jy|$!

▷**5)** En augmentant λ il y a 1, 2, 4, 8... valeurs d'adhérences puis ça se complique !

▷**6)** Utiliser Cauchy-Schwarz.

▷**7)** Cette distance est nulle : $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ est un entier et le deuxième terme est aussi petit que l'on veut.

▷**8)** Prendre pour n la partie entière de $\theta = (\mathrm{Arc}\sin x + 2k\pi)^2$ avec k grand. La fonction sin est continue (liptschitzienne) et les valeurs sont de plus en proches les unes des autres.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
x=np.linspace(0,1000,1001)
p1=plt.plot(x,np.sin(np.sqrt(x)),marker='v')
plt.show()
```

▷**9)** un inf de sup... Une suite qui reste entre 0 et 2 est à distance $\leqslant 1$.
Deuxième cas : la distance est au moins $\mathrm{Max}(|\ell \pm 1|)$ donc une suite convergente la plus proche a pour limite 0.

▷**10)** a) Les normes ne sont pas équivalentes : on fabrique une suite de fonctions (f_n) tq $\|f\|_\infty$ soit bornée mais $N(f_n) \to \infty$ par exemple.
c) Trouver les meilleures constantes !

▷**11)** $\|\varepsilon_n - \varepsilon_p\| = \sqrt{2}$ pour $n \neq p$.

▷**12)** Si $\alpha = 0$, il y a des éléments arbitrairement petits, i.e. des $0 < g < \varepsilon$. Alors pour tout réel x on a $d(x, g\mathbb{Z}) < \varepsilon$.
Si $\alpha > 0$ *le problème est qu'on ne sait pas que* $\alpha \in G$, *il faut le prouver* : pour ça on utilise que α est limite d'une suite (g_n) d'éléments de G et on montre que cette suite est obligée de stationner.
Un groupe de rotations fini : elles ont forcément même centre. Les angles sont dans un $\theta\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$.

▷**13)** Partir de $\|x - a\| \leqslant \|y - a\| + \|x - y\|$ et utiliser deux fois la définition d'un inf.

▷**14)** Choisir $a, b \in A$ tels que $f(x), f(y)$ soient très proches de $\|x - a\|, \|y - b\|$ et faire le dessin pour voir à quoi comparer $f(\lambda x + (1-\lambda)y)$.

▷**15)** $f'' + 2f' + f = 0$ ET $f(0) = f'(0) = 0$ impose $f = 0$ (fonction nulle). $g''(t) = e^t(f'' + 2f' + f)$ ce qui permet de majorer $g'(x) = \int_0^x g''$, puis $g(x) = \int_0^x g'$.

▷**16)** Déjà $\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f|^2 = \sum |a_k|^2$ en développant $f \times \overline{f}$ et en remarquant que $\int_0^{2\pi} \varepsilon_k = 0$ sauf quand $k = 0$.
Ensuite on a pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$|f'(t)| = |(i)\sum k a_k \varepsilon_k(t)| \leqslant \sum k\,\mathrm{Sup}\,|a_k\| \leqslant \sum k\|f\|_\infty = \frac{n(n+1)}{2}\|f\|_\infty$$

On peut faire mieux avec Cauchy-Schwarz ($\sqrt{\sum k^2}\sqrt{\sum |a_k|^2}$ donne $c_n = \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$). En rusant *beaucoup*, on peut réduire c_n à n (inégalité de BERNSTEIN).

▷**17)** Utiliser les suites.

▷**20)** Pour le contrex définir une fonction par morceaux.

▷**22)** Un point éventuel de l'intersection serait à distance nulle de B mais aussi dans une boule incluse dans A. Dessin.
Pour la suite : partir de $A \subset (E \setminus \overline{B})$, prendre l'adhérence, etc.

▷**23)** La réunion des intérieurs n'est pas forcément égale à l'intérieur de la réunion.

▷**27)** Ah, les suites de suites...
Si oui, il faut montrer qu'une suite de plus en plus proche d'une suite convergente finit par converger aussi. Sinon faire une suite de suites convergentes, dont la limite est une suite divergente.

▷**29)** Diverses caractérisations possibles de la continuité. Pourquoi pas par les suites.

▷**31)** Prendre $A_p = A - \frac{1}{p} I_n$. Justifier que $\operatorname{Det} A_p$ ne peut s'annuler que pour un nombre fini de valeurs de p.
L'exo suivant fonctionne sur un principe similaire, mais en ajoutant des valeurs diagonales 2 à 2 distinctes quoique tendant vers 0.

▷**33)** C'est dur. Raisonner sur le polynôme caractéristique : si $A_n \to A$ alors $\chi_{A_n} \to \chi_A$.

▷**34)** Se ramener par diagonalisation à la suite de Babylone : $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{\lambda}{u_n})$ dans $\mathbb{R}_+$.

▷**36)** On peut prendre la négation de l'équivalence.

▷**37)** $P \mapsto P(c)$ est continue pour $|c| < 1$. Sinon faire une suite de polynômes qui fait exploser la norme.
$P \mapsto P'$ est discontinue (même technique).

▷**38)** Fabriquer une suite de fonctions telles que $\|f_n\|_1$ soit bornée, mais $f_n(c) \to \infty$.

▷**40)** Pour A^{-1} penser à la formule.

▷**41)** $\|f(x) - x\|$ atteint un minimum. Finir quia absurdum.

▷**42)** Utiliser les suites.

▷**43)** Fermé = compact ici. Et l'application réciproque de f^{-1} est f, qui envoie un compact sur un compact !

▷**44)** La sphère unité n'est jamais compacte en dim infinie en fait.

▷**45)** inf = limite de suite...

▷**46)** Distance de X^n à un sev.

▷**51)** Donner la formule explicite.

▷**53)** a) : linéaire, égalité des dimensions. c) : Quelle quantité est non nulle ssi une certaine application linéaire est bijective ?...

▷**54)** On pourra souvent faire un dessin pour montrer l'existence du chemin requis. Pour les matrices, essayer de trigonaliser ou diagonaliser selon le cas.

▷**55)** Il faut penser à retirer un point et à regarder ce qui se passe alors...

▷**56)** Projeter de 0 pour aller jusqu'à un cercle (une sphère) qui enclôt A.

▷**57)** Dans un evn, dur dur, cf. corrigé Agrégation interne 2012. Dans $\mathbb{R}$, supposant qu'il y ait deux v.a. $\ell_1 < \ell_2$, soit $x \in]\ell_1, \ell_2[$ et $\varepsilon > 0$ fixé. Fabriquer $N \leqslant N_1 < N_2$ tq $u_{n_1} < x < u_{N_2}$ et $|u_{n+1} - u_n| < \varepsilon \ \forall n > N$. Considérer $\operatorname{Max}\{n \mid n_1 \leqslant n \leqslant N_2 \text{ et } u_n < x\}$ pour conclure.

▷**58)** C'est un exemple de "composante connexe par arcs".