Indications – pour ceux qui ont tout essayé...

▷**1)** 4 points stationnaires.

▷**2)** La tangente fait un angle constant avec le rayon vecteur. Réciproquement on peut remarquer que cet angle V est donné par la relation $\tan V = \dfrac{r}{r'}$ et résoudre une équa diff.

▷**4)** On trouve la paramétrisation $\left(\frac{3t}{1+3t^2}, \frac{3t^2}{1+3t^2}\right)$ et l'asymptote oblique $x + y = a$. La courbe se recoupe à l'origine.

▷**5)** Poser $g(u) = f(\varphi(u))$ et calculer les dérivées adéquates.

▷**6)** Tangente $x\cos t + y \sin t = a$.

Pour la réciproque on écrit un système $\begin{cases} ax + by & = c \\ a'x + b'y & = c' \end{cases}$, compte tenu de ce que $ax' + by' = 0$ (on veut que (a, b) soit un vecteur normal). Reste à résoudre dans ce cas particulier où $a = \cos t, b = \sin t$ etc. On retrouve l' astroïde. Le phénomène est général : on peut retrouver une courbe connaissant la famille de ses tangentes.

▷**7)** On remplace y en fonction de x et on obtient

$$x^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{p^2}{b^2}\right) + x\left(\frac{2py_0}{b^2} - \frac{2p^2x_0}{b^2}\right) + \frac{p^2x_0^2}{b^2} - \frac{2px_0y_0}{b^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1 == 0$$

Le discriminant égal à 0 donne après calculs (...) $a^2p^2 + b^2 - p^2x_0^2 + 2px_0y_0 - y_0^2 = 0$. Deux tangentes issues du même point (i.e. triplets x_0, y_0, p et x_0, y_0, p' vérifiant cette équation) sont perpendiculaires ssi $pp' = -1$. Or le produit des racines de l'équation est $\dfrac{b^2 - y_0^2}{a^2 - x_0^2}$. Le poser égal à -1 donne l'équation d'un cercle.

Ce cercle est appelé *courbe orthoptique* de l'ellipse.

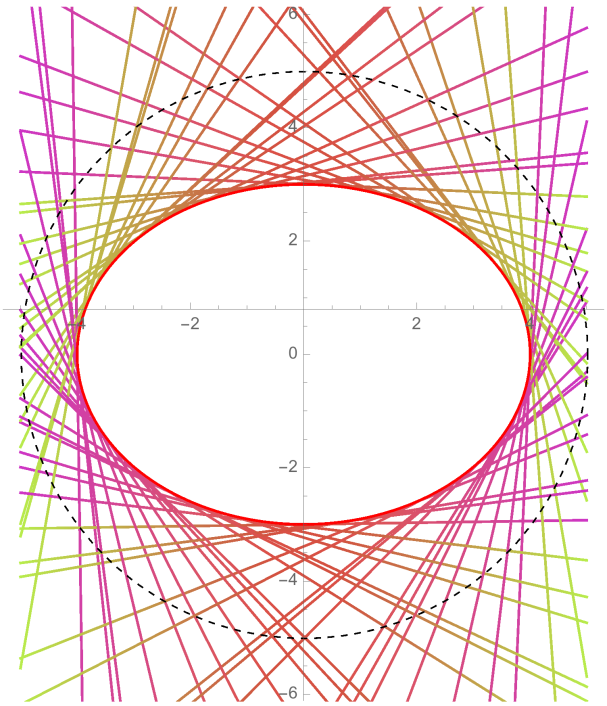

FIGURE 1. Orthoptique d'une ellipse

▷**8)** L'équation équivaut à $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}$. On voit sur la courbe de la fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{t}$ que tout réel compris entre 0 et $1/e$ a deux antécédents distincts, $x < e < y$. Bien sûr on a les solutions évidentes $x = y > 0$.

On peut aussi paramétrer : $x = t^{1/(t-1)}, y = t^{t/(t-1)}$. Ceci permet d'établir que la courbe est $\mathcal{C}^\infty$.

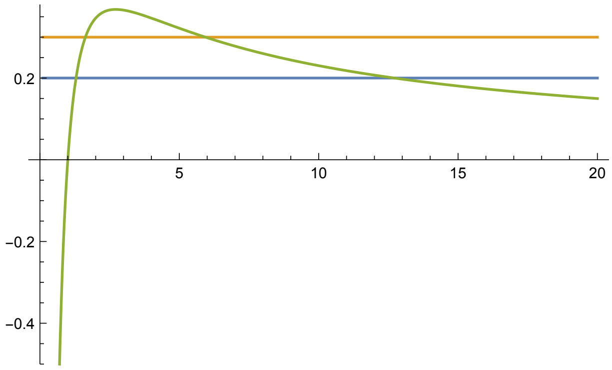

FIGURE 2. deux solutions pour $\frac{\ln t}{t} = \alpha$

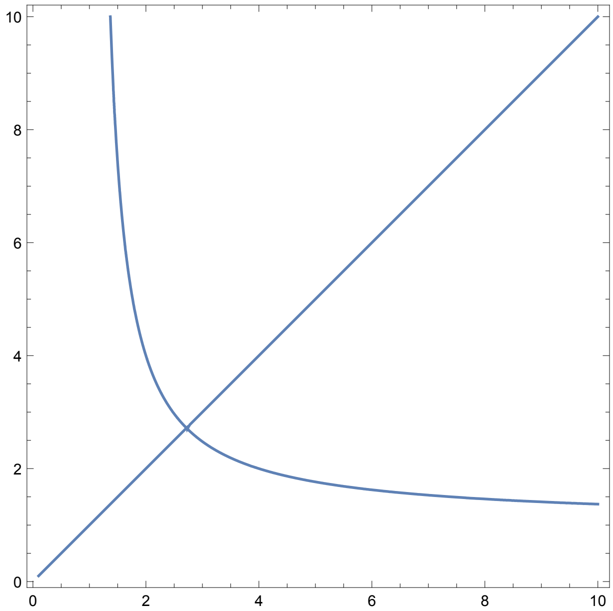

FIGURE 3. La courbe complète $x^y = y^x$

▷**9)** $x = a\cos t, y = b\sin t$. La normale au point $M(t)$ est $\dfrac{x\cos t}{a} + \dfrac{y \sin t}{b} = 1$. La tangente est donc dirigée par $\left(\dfrac{\cos t}{a}, \dfrac{\sin t}{b}\right)$ et on compare les angles avec $\vec{MF}, \vec{MF'}$ par un produit scalaire.

▷**10)** À part les points stationnaires $t \in 2\pi\mathbb{Z}$ on a $x' > 0$ et donc la fonction réciproque est aussi dérivable. Il vient alors
$$\int_0^{2\pi a} \varphi(x)\,dx = \int_0^{2\pi} y(t)(x'(t)\,dt) = a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2\,dt = 3\pi a^2.$$
Galilée avait trouvé ce résultat... en **pesant** l'arche de cycloïde découpée dans une plaque de fonte et en l'équilibrant avec trois disques découpés dans la même plaque !!

▷**11)** Noter que la symétrie sur le paramètre $t \mapsto -t$ équivaut à la symétrie dans le plan par rapport à (Ox). Il n'est pas évident de vérifier l'associativité de la loi sur sa définition géométrique [sans utiliser de paramétrage], mais c'est vrai pour toute courbe du troisième degré ! Ce groupe est un groupe projectif, la question de l'isomorphisme (yanapa) avec $\mathbb{R}^*$ est trop vache. Intuitivement on peut visualiser que c'est un cercle (suivre la courbe jusqu'à l'infini et revenir “de l'autre côté”). Il y a effectivement un isomorphisme avec le groupe du cercle $\mathbb{U}$ (et en particulier des points d'ordre $3, 4 \dots n$).