Indications

1 Un barycentre de barycentres est un barycentre.

2 Un sens toujours vrai. Dans l'autre, $a+b = 2\times\dfrac{a+b}{2}$.

3 Dériver la factorisation de P. Appliquer la formule à une racine α de P' en écrivant les fractions sous la forme $\dfrac{\overline{\alpha - a}}{|\alpha - a|^2}$ pour en tirer $\overline{\alpha}$, puis α.

4 Prendre un repère d'origine A, écrire $A\vec{M} = xA\vec{B} + yA\vec{C}$. Le centre de gravité est une combinaison d'un sommet et du milieu du côté opposé. Pour l'orthocentre, poser

$$H = \frac{\tan\widehat{A}.A + \tan\widehat{B}.B + \tan\widehat{C}.C}{\tan\widehat{A} + \tan\widehat{B} + \tan\widehat{C}} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}A + \frac{\beta+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}A'$$

en posant $A' = \frac{\beta B + \gamma C}{\beta+\gamma}$ (on décompose H entre A et le côté $[BC]$).

Yapuka montrer que A', barycentre de $(B, \tan\widehat{B})$ et $(C, \tan\widehat{C})$, est le pied de la hauteur ce qui se voit bien en exprimant justement $\frac{AA'}{BA'}$ et $\frac{AA'}{CA'}$.

5 Méthode élémentaire : $a_n + b_n + c_n$ est constante, les deux autres sont géométriques et tendent vers 0. a_n, b_n, c_n se déduisent de ces trois suites annexes par un système de Vandermonde, donc convergent aussi et leurs limites viennent aisément.

6 Utiliser une inégalité célèbre.

8 Somme OK, produit : faux, donner donc un contre-exemple.

9 Cet exercice et les voisins utilisent du raisonnement par l'absurde.

12

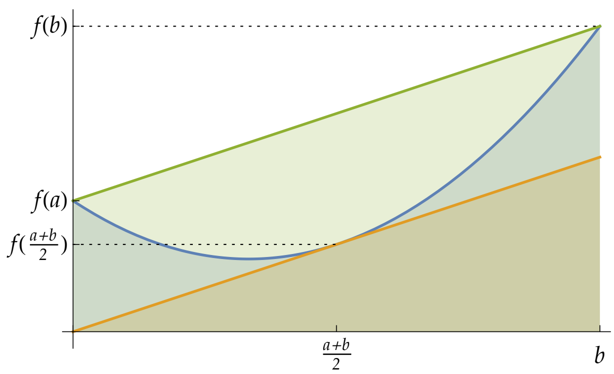

FIGURE 1. Encadrement par deux trapèzes

13 Fonctions $\sqrt{\ }$ et $\ln(\ln(\ ))$.

14 Raisonner sur les limites du taux d'accroissement.

15 Majorer f par une tangente. Ne pas oublier de prouver que la limite est bien α.
NB : la convergence de cette méthode est très rapide, quand on part près d'une racine.

16 Par récurrence sur n puis par densité.

17 Diviser par $x_1 \dots x_n$ après avoir traité le cas nul et utiliser l'indication avec les $\ln(y_i/x_i)$.