Indications – pour ceux qui ont tout essayé...

▷**1)** Ne pas oublier de vérifier que les intégrales ont bien un sens. Pour d), vérifier que E est bien un ev ! Pour g) et aurtes p.s. sur les polynômes, arguer d'une infinité de racines pour justifier qu'on trouve le polynôme nul (pas juste une *fonction* nulle quelque part).

▷**2)** Prolonger AM. Découper $(ABC.)$ en triangles rectangles.

▷**3)** $\sqrt{a^2+b^2}$ est la diagonale d'un rectangle...

▷**5)** Ne pas oublier x_0.

▷**7)** Calculer $\langle\, f(x+\lambda z) - f(x) - \lambda f(z) \,|\, y \,\rangle$.

▷**8)** Si $g \in F^\perp$, prendre $f_n \in F$ qui coïncide avec g entre -1 et $-1/n$, faute de pouvoir la prendre égale jusqu'à 0.

▷**10)** $4f(2x,z) = \|x+x+z\|^2 - \|x+x-z\|^2$ ce qui suggère d'écrire des égalités de la médiane pour x et $x \pm z$. Ensuite on peut poser $x+y=u$ et $x-y=v$. Enfin on établit $f(nx,z) = nf(x,z)$ pour n entier naturel, relatif, puis rationnel, puis réel.

▷**12)** Certaines applications linéaires sont continues, d'autres pas...

▷**)** Bons espaces, linéaire, injective, dimensions (attention ! c'est faux en dim infinie car l'espace des formes linéaires (le dual) est toujours « strictement plus grand »).
Définir $u^-(y)$ pour un y donné.

▷**14)** Reconnaître des inégalités de Cauchy-Schwarz (suivants aussi) quitte à bidouiller.

▷**16)** Reconnaître ps $\leqslant$ produit de normes.

▷**17)** $\sqrt{\|x\|^2 - < e, x >^2}$.

▷**18)** Supposer que p n'est pas orthogonal : il existe alors un couple $(x,y) \in \operatorname{Ker} p \times \operatorname{Im} p$ tel que...

▷**19)** Pour les inclusions d'intervalles se ramener à des intervalles d'entiers (en multipliant par une puissance de 2).

▷**20)** b) Montrer que x est égal à sa projection sur les (e_i).

▷**21)** a) Schmidt.
b) $E_{n+1} \cap E_n^\perp$ est une droite.
d) Les cordonnées dans (P_k) s'obtiennent par des produits scalaires.
e) Utiliser que $\langle\, XP_n \,|\, P_{n-1} \,\rangle = \langle\, P_n \,|\, XP_{n-1} \,\rangle = \langle\, P_n \,|\, P_n + \dots \rangle = \|P_n\|^2$.

▷**22)** Distance de la fonction racine au sev des fonctions affines pour un ps à préciser.
$a = \dfrac{15\pi}{64}, b = \dfrac{3\pi}{32}, \min = \dfrac{4}{3} - \dfrac{69\pi^2}{512}$.

▷**23)** $a = -5/2, b = 3, \mathrm{Min} = 1/4$.

▷**25)** En dimension $n-1$ on peut disposer n vecteurs unitaires faisant des angles mutuels de $\operatorname{Arc}\cos\left(-\frac{1}{n}\right)$, cette figure s'appelle un simplexe régulier et généralise le tétraèdre en dimension 3. Démo possible par récurrence.

▷**26)** Changement de variable entre intervalles réels svp !
Cet exercice signifie que la plus grande valeur propre de la matrice de Hermite (de terme général $\dfrac{2}{i+j-1}$) ne dépasse pas π. Cette borne est optimale mais c'est une autre histoire.

▷**27)** Une base de F est, par exemple, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. C'est une base orthogonale [si vous avez moins de chance il faudra orthogonaliser la vôtre]. La projection orthogonale du vecteur (x,y,z,t) sur la base orthogonale obtenue vaut (formule du cours)

$$\frac{1}{10}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x-y) \\ \frac{1}{2}(-x+y) \\ \frac{1}{2}(z-t) \\ \frac{1}{2}(-z+t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est bien celle d'une projection (cf. carré) orthogonale (car symétrique). On peut en déduire l'expression de la distance car

$$\|X-p(X)\|^2 = \|X\|^2 - \|p(X)\|^2 = (x^2+y^2+z^2+t^2) - \frac{1}{2}(x-y)^2 - \frac{1}{2}(z-t)^2$$

Le symétrique est $2p(X)-X$.

▷28) Vérifier la convergence pour une fonction sinus.
Pour les sommes infinies, justifier l'intégration terme à terme.

▷29) La norme préhilbertienne cachée derrière est une norme sur l'espace $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ – pas plus – définie par $\|P\|^2 = \sum_{i=1}^n P(x_i)^2$. Ici on veut minimiser la somme des carrés des écarts entre les valeurs prises en les x_i par la fonction affine $x \mapsto ax+b$ et les valeurs (par exemple expérimentales) y_i. En étudiant cette fonction de b à a fixé, et l'inverse, on trouve les conditions

$$b = \bar{y} - a\bar{x} \qquad \overline{xy} = a\overline{x^2} + b\bar{x}$$

(en notant $\bar{X}$ pour la moyenne des valeurs prises par X) La première équation dit que la droite passe par le point $(\bar{x},\bar{y})$, isobarycentre du nuage de points. La deuxième exprime la pente a (on trouve $a = \dfrac{\overline{xy}-\bar{x}\bar{y}}{\bar{x^2}-\bar{x}^2}$) et n'est pas sans rappeler le coefficient de corrélation étudié en probabilités.

▷30) 1) Utiliser la compacité et qu'un inf est la limite d'une suite.
2) $(a+b)/2$ serait plus près de x que a ou b.

▷31) Penser trace.

▷33) Regarder cette application sur un exemple, déjà.

▷34) Écrire $x = \sum x_i e_i$ dans une BON de vecteurs propres de v. On a $\|AX\|^2 = {}^tX{}^tAAX = \langle X \,|\, SX \rangle$.

▷35) $< x \mid u(x) >= {}^tX{}^tAX$ est une matrice 1×1. D'où $\Rightarrow$. Pour la réciproque, montrer que ${}^tX({}^tA+A)Y$ est toujours nul en appliquant la relation à $x+y$, en déduire que $({}^tA+A)Y$ est toujours le vecteur nul. On peut aussi remarquer que ${}^tA+A$ est diagonalisable et motnrer que 0 est sa seule v.p.
${}^t\exp(u) = \exp({}^tu)$. Pour le det retrouver $\det(\exp(u)) = \exp(\mathrm{Trace}(u))$.

▷36) Calculer ${}^tXA^2X$ de diverses façons (${}^t(AX)(AX) = \|AX\|^2$).
On vérifie que le plan est stable (X est vecteur propre associé à $ia \iff \bar{X}$ est vecp associé à $-ia$).

▷37) Tout élément du noyau est dans $\mathrm{Vect}\, a$. Il y a une valeur propre évidente, de multiplicité $n-1$.

▷38) La fonction $f : x \mapsto x^3+x+1$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Il existe un polynôme qui interpole f^{-1} aux vp de B. B et A sont diagonalisables dans une même base de vecp.

▷39) Compléter $a/\|a\|$ en une BON.

▷40) A est inversible, son inverse vaut une matrice qui est symétrique, etc.

▷41) Utiliser le vecteur $(1,1\dots 1)$ et Cauchy-Schwarz, après avoir épuisé le fait que les coefficients sont dans $[-1,1]$.

▷42) Colonnes = BON. Ensuite rotation ou pas ?

▷43) Compléter le vecteur en une BON, écrire la matrice dans cette base puis revenir à la base canonique. On trouve la matrice de passage (parmi d'autres possibles)

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{2/3} \end{pmatrix}$$

et la matrice de rotation

$$R = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 13 & 1+3\sqrt{3} & 1-3\sqrt{3} \\ 1-3\sqrt{3} & 13 & 1+3\sqrt{3} \\ 1+3\sqrt{3} & 1-3\sqrt{3} & 13 \end{pmatrix}$$

On vérifie de tête que le vecteur $(1,\ 1,\ 1)$ est bien fixe. Bien entendu, on trouve la matrice inverse si on a choisi l'autre orientation pour notre BON.

▷44) Les conditions se ramènent à $a+b+c=1$ et $a^2+b^2+c^2=1$, ou de manière équivalente $ab+bc+ca=0$. C'est dire que a,b,c sont les racines *réelles* d'un polynôme

$$X^3 - X^2 + 0X - abc = X^3 - X^2 + 0X + k$$

Une étude de fonction montre que ce polynôme a trois racines réelles $\iff 0 \leqslant k \leqslant \dfrac{4}{27}$.

▷**47)** $-A$ est une rotation. Un tétraèdre régulier possible a les sommets suivants :

$$(1,1,1),(1,-1,-1),(-1,1,-1),(-1,-1,1)$$

qui sont permutés par une telle anti-rotation d'ordre 4.

▷**48)** On paramètre l'axe du demi-tour par deux angles (coord sphériques) : un vecteur directeur serait $\cos a \cos b, \cos a \sin b, \sin a$. On complète en une BON ce qui fait une matrice P de passage, orthogonale et on en déduit une paramétrisation de LA matrice générale d'un demi-tour par les angles a, b.

Le calcul est heureusement superflu. Il donnerait

$$P = \begin{pmatrix} \cos(a)\cos(b) & -\sin(b) & -\cos(b)\sin(a) \\ \cos(a)\sin(b) & \cos(b) & -\sin(a)\sin(b) \\ \sin(a) & 0 & \cos(a)\cos^2(b)+\cos(a)\sin^2(b) \end{pmatrix},$$

$$R = \begin{pmatrix} \cos(2a)\cos^2(b)-\sin^2(b) & \cos^2(a)\sin(2b) & \cos(b)\sin(2a) \\ \cos^2(a)\sin(2b) & \cos(2a)\sin^2(b)-\cos^2(b) & \sin(2a)\sin(b) \\ \cos(b)\sin(2a) & \sin(2a)\sin(b) & -\cos(2a) \end{pmatrix}$$

Il suffit de dire que c'est continu (polys trigos), donc $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ est image d'un (produit de) connexe par arcs par l'application $(S,T) \mapsto S \times T$ qui est continue.

▷**49)** La restriction à un plan stable est une rotation, on diagonalise les blocs 2×2.

▷**50)** a) Déjà les dimensions sont égales. b) résulte de la somme directe orthogonale.

c) Utiliser b). La suite $(u^n(y))_n$ n'est sans doute pas convergente, mais elle est bornée (norme constante).

▷**51)** Ces matrices étant orthogonales, on peut les diagonaliser par blocs. Reste à le faire. La matrice A a la gentillesse d'admettre 1 comme vp double – on a $\chi_A(\lambda) = (x-1)^2(x^2 - \frac{8}{5}x + 1)$. On a donc un plan stable et même fixe, engendré par les deux vecteurs propres réels $(1,1,0,0)$ et $(0,0,1,1)$. Il n'est pas utile de donner explicitement une complétion en une BON (sauf si on veut calculer A^n, bon courage) car on connait le cosinus ce l'angle restant (4/5). Ceci dit ce serait facile.

Pour B on a 1 et -1 qui sont v.p., l'angle restant est $2\pi/3$.

▷**52)** Évidemment on prend la réflexion orthogonale d'hyperplan l'hyperplan médiateur de $(x, s(x))$. Alors $r \circ s$ renvoie x sur x. De plus, les points fixes de s sont équidistants de x et de $s(x)$ donc restent fixes par r.