SUR LA TRANSFORMÉE DE LAPLACE MP

1. Principe de base

DÉFINITION 1. *La transformée de Laplace d'une fonction* f*, dite* ***original****, est* $F = \mathcal{L}(f)$ *définie par*

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}$$

Cela est défini pour p assez grand (selon f).
Usage :
la transformée de Laplace, i.e. remplacer f par F, transforme les dérivations en multiplications. À une expression différentielle en f correspond donc **le produit de F par un polynôme**. Si on sait récupérer l'original d'une fraction rationnelle, on peut donc ainsi résoudre des équations différentielles.

2. Exemples

On a bien sûr (!) la transformée de 1 qui est $\int e^{-pt}\,dt = 1/p$. À peine plus délicat :

$$f(t) = \sin(t) \qquad F(p) = \frac{1}{1+p^2} \qquad\qquad f(t) = \sin(\omega t) \qquad F(p) = \frac{\omega}{\omega^2+p^2}$$

$$f(t) = \cos(t) \qquad F(p) = \frac{p}{1+p^2} \qquad\qquad f(t) = \cos(\omega t) \qquad F(p) = \frac{p}{\omega^2+p^2}$$

viennent bien par parties (deux fois).

$$f(t) = e^{at} \qquad F(p) = \frac{1}{p-a} \quad (a \text{ réel ou pas}) \qquad\qquad f(t) = t^n \qquad F(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

Les exponentielles sont utiles pour des pbs mécaniques (régimes quasi périodiques et autres).

3. Quelques secrets

$f \mapsto F$ est une application linéaire bijective. . . si l'on choisit bien les espaces de départ et d'arrivée. En particulier la donnée de F **détermine** f (unicité).

PROPOSITION. *La transformée de Laplace de la dérivée* f' *est*

$$\mathcal{L}(f')(p) = pF(p) - f(0)$$

En particulier quand $f(0) = 0$ *on a* $\mathcal{L}(f')(p) = pF(p)$ *(dérivée = produit).*
Plus généralement bien sûr

$$\mathcal{L}(f'')(p) = p^2F(p) - pf(0) - f'(0)$$

etc. . .
Exemple : cf. les transformées de cos et sin.
Dans l'autre sens c'est plus simple :

PROPOSITION. *Dériver l'image revient à multiplier l'original par* $-t$ *:*

$$\mathcal{L}(-t\,f(t)) = F'(p) \qquad \textit{i.e.} \qquad \mathcal{L}^{-1}(F') = -tf(t)$$

Application : la dérivée de $\arctan p$ étant l'image de sin, c'est que l'image du sin cardinal est -arctan à une constante près !

PROPOSITION. ***Transformées*** *: il est bon de connaître ces « bricolages ».*

$$\mathcal{L}(f(at)) = \left(p \mapsto \frac{1}{a} F(\frac{p}{a})\right)$$
$$\mathcal{L}(f(t-a)) = e^{-ap} F(p)$$

proviennent d'un changement de variable (facile à refaire). Exemple :

$$\mathcal{L}(\sin(2t)) = \frac{1/2}{1+(p/2)^2} = \frac{2}{4+p^2}$$

4. Résolution d'équations différentielles

Il est impératif de disposer des conditions initiales.

4.1. Exemple 1

$x''(t) + x(t) = 2\cos t, x(0) = 0, x'(0) = 1$. Soit f la solution, il vient

$$\mathcal{L}(f'') + \mathcal{L}(f) = 2\mathcal{L}(\cos) \iff p^2 F - 0pF(p) - 1 + F(p) = \frac{2p}{1+p^2}$$

On en tire

$$F(p) = \frac{2p}{(p^2+1)^2} + \frac{1}{p^2+1} = -\left(\frac{1}{p^2+1}\right) + \frac{1}{p^2+1}$$

d'où coolos (dérivée d'une image...)

$$f(t) = +t\sin t + \sin t$$

4.2. Exemple 2

$x''' + x' = 1, x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$. On a tout simplement

$$p^3 F(p) + pF(p) = \frac{1}{p} \iff F(p) = \frac{1}{p^2(p^2+1)} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+1} \iff f(t) = t - \sin t$$

4.3. Transitoires

Une sinusoïde amortie est un original du genre $t \mapsto \mathrm{Re}(e^{(-a+i\omega)t})$ (à moins que ce n'en soit la partie imaginaire). Sa transformée est donc

$$F(p) = \mathrm{Re}\,\frac{1}{p+a-i\omega} = \frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2} \quad \text{ou} \quad \mathrm{Im}\,\frac{1}{p+a-i\omega} = \frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$$

Réciproquement, quand on a une $F(p)$ de la forme $\dfrac{u\,p+v}{p^2+2\alpha p+\beta}$, on obtient le tax de décroissance (ou d'amortissement) $a = \alpha$, et la pseudo-pulsation ω est telle que

$$\boxed{\text{la valeur minimum de } p^2+2\alpha p+\beta \text{ vaut } \omega^2\ (= \beta - \alpha^2).}$$

Pour l'amplitude, désolé mais c'est compliqué ! Surtout quand il y a du cosinus...
Un dernier détail utile : l'original est un sinus (i.e. est nul en 0) ssi $u = 0$.

Exemple : on a $F(p) = \dfrac{4}{p^2+100p+2600}$.

Il vient $a = 50, \omega^2 = 100, \omega = 10$ et l'original est $\dfrac{1}{5}\sin(10t)e^{-50t}$.