Séries entières

EXERCICE 1. *Calculer les sommes des séries entières suivantes, en précisant le domaine de validité des identités obtenues et le rayon de convergence.*

$$\sum_0^{+\infty} \sin(n\alpha)\, x^n \text{ et } \sum_0^{+\infty} \cos(n\alpha)\, x^n; \qquad \sum_0^{+\infty} \mathrm{sh}(na) z^n \qquad \sum_0^{+\infty} n^3 x^n \qquad \sum_0^{+\infty} \frac{n^3}{n!} x^n \qquad * \sum_0^{+\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)!}$$

EXERCICE 2. *Rayons de convergence des séries suivantes :*

$$(\sum z^n \sqrt{n}) \qquad (\sum n!\, z^{n^2}) \qquad (\sum z^{n!}/n!) \qquad (\sum \frac{\mathrm{ch}\, n}{n} z^n) \qquad (\sum 4^{n^2} z^{1+2+\cdots+n}) \quad (\sum \pi^{-\lfloor n\sqrt{5}\rfloor} z^n)$$

EXERCICE 3. *Idem avec* $(\sum a_n z^n)$, *quand* a_n *vaut :*

$$n^{\sqrt{n}} \qquad \lfloor \pi^n \rfloor \qquad \tan\big(\pi(2-\sqrt{3})^n\big) \qquad \mathrm{th}\Big(\frac{\pi}{3} - \mathrm{Arc}\cos\frac{n+1}{2n+1}\Big) \qquad \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n} \qquad \frac{(2n)!\, n^{2n}}{3^n n! (3n)!}$$

$a_n = \big(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\big)^{n^2}$ $\qquad a_n = \mathrm{Arc}\cos(1 - \frac{1}{n^3})$ $\qquad a_n \to \ell \neq 0$ $\qquad a_n = \dfrac{b_n}{n!} \neq 0$ *où* $\sum b_n$ *converge ;*

$\sum a_n$ *converge (minorer le rayon) ;* $\qquad a_n = n^{\text{ième}}$ *décimale de* π *;* $\qquad *a_n = \dfrac{1}{n\sqrt{2} - \lfloor n\sqrt{2} \rfloor}$.

EXERCICE 4. *On donne le rayon* $0 < R < +\infty$ *de la série* $(\sum a_n z^n)$. *Évaluer celui de* $(\sum b_n z^n)$ *où :*

$$b_n = n^6 a_n \qquad b_n = n!\, a_n \qquad b_n = \frac{a_n}{n!} \qquad b_n = a_n^2 \qquad b_n = \sum_{k=0}^n a_k \qquad b_{2n} = a_n, b_{2n+1} = 0.$$

EXERCICE 5. *Soit* n *un entier* $\geqslant 2$. *Faire le DSE de* $\dfrac{1}{1+t+\ldots t^n}$.

EXERCICE 6. *Vrai ou Faux ? prouvez-le !*

1. $(\sum a_n z^n)$ *et* $(\sum |a_n| z^n)$ *ont même rayon de convergence.*
2. $(\sum a_n z^n)$ *et* $(\sum |a_n| z^n)$ *ont même domaine de convergence.*
3. *Si* $(\sum a_n z^n)$ *a un rayon de convergence infini alors elle converge uniformément sur* $\mathbb{R}$.
4. *La série* $(\sum a_n x^n)$ *a un rayon de convergence égal à 1 donc sa somme* $f(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ *tend vers l'infini quand* $x \to 1$ *par valeurs inférieures, ou quand* $x \to -1$ *par valeurs supérieures.*
5. *Le rayon de CV de* $(\sum a_n z^n)$ *vaut* $R \iff$ *les rayons de convergence des séries* $(\sum a_{2n} z^{2n})$ *et* $(\sum a_{2n+1} z^{2n+1})$ *sont tous deux égaux à* R.

EXERCICE 7. *Montrer que* $z \mapsto \dfrac{1}{z-a}$ *et* $z \mapsto \dfrac{1}{(z-a)^{p+1}}, p \in \mathbb{N}$, *sont DSE pour* $a \in \mathbb{C}^*$. *Rayon ?*

En déduire que toute fraction rationnelle – ou presque – est DSE.

Donner par exemple le DSE$_0$ *de* $z \mapsto \dfrac{1}{z^3 - 6z^2 + 11z - 6}$ *et de* $z \mapsto \dfrac{1+2z}{1-z-z^2}$.

EXERCICE 8. *Déterminer les DSE au voisinage de 0 des fonctions suivantes :*

$$\cos x \operatorname{ch} x \qquad \ln(x^2-5x+4) \qquad \ln(1+x+x^2) \qquad \cos(x+a) \text{ où } a\in\mathbb{C} \qquad * \,(\operatorname{Arc}\sin x)^2 \text{ (équa diff)}$$

EXERCICE 9. *Calculer* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+2}}{4n+2}$ *; où la somme est-elle définie et continue ? Valeur en* $x=1$ *?*

Variante : calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}, \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(2n+1)}$.

EXERCICE 10. *Formule de* PLOUFFE *(1995). Montrer que* $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{16^p}\left(\frac{4}{8p+1}-\frac{2}{8p+4}-\frac{1}{8p+5}-\frac{1}{8p+6}\right)=\pi.$

(on calculera $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{16^p}\frac{x^{8p+1}}{8p+1}$ *et des quantités similaires). Ceci permet de calculer le 400 milliardième chiffre du développement en base 16 de* π *sans avoir à calculer les précédents.*

EXERCICE 11. *Montrer que* $\displaystyle\sum_{k=n-q}^{p}\binom{p}{k}\binom{q}{n-k}=\binom{p+q}{n}$, *par dénombrement ou produit de polynômes ou toute autre méthode.*
** À l'aide des DSE de* $1/(1-x)^p$ *et* $1/(1-x)^q$, *établir de même la valeur de* $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\binom{p+k-1}{k}\binom{q+n-k-1}{n-k}$.

EXERCICE 12. *Trouver deux séries entières à coefficients positifs (strictement, svp !) telles que* $\left(\sum a_nx^n\right)\left(\sum b_nx^n\right)=\sum_{n\geqslant 0}x^n$.

EXERCICE 13. *Trouver le DSE de* $x\mapsto e^{x^2}\displaystyle\int_x^{+\infty}e^{-t^2}\,dt$ *grâce à une équation différentielle.*

EXERCICE 14. *Soit* $|a|<1$ *: montrer que* $f_a : x\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sin(a^nx)$ *définit une fonction sur* $\mathbb{R}$, *qu'elle est* $\mathcal{C}^\infty$, *puis (*TAYLOR *avec reste intégral) qu'elle est somme de sa série de* TAYLOR, *et donc DSE. Procéder par sommation d'une série double pour retrouver le même résultat.*

EXERCICE 15. *Montrer que* $\forall x\in\mathbb{R}\ \operatorname{ch}x\leqslant e^{x^2/2}$. ** Peut-on faire mieux, i.e. majorer par* $e^{x^2/2.00001}$ *?*

EXERCICE 16. *Montrer que la fonction définie par* $f(x)=\begin{cases}\operatorname{ch}(\sqrt{x}) & \text{pour } x\geqslant 0\\ \cos(\sqrt{-x}) & \text{pour } x\leqslant 0\end{cases}$ *est* $\mathcal{C}^\infty$.

EXERCICE 17. *Étant donné une constante* q *telle que* $|q|<1$, *chercher une fonction DSE* f *telle que*

$$\forall x\in\mathbb{C}\quad f(x)=(1-qx)f(qx)$$

(rem : il y a une seule solution de cette équation sur $\mathbb{R}$ *dès qu'on impose la continuité en 0)*

EXERCICE 18. *On considère* $f=$ *Tan ; écrire le développement de* TAYLOR *avec reste intégral pour* f *au voisinage de 0. Quel est son domaine de validité ? on note* $\sum a_nx^n$ *le DL obtenu à tout ordre. En notant que* $f'=f^2+1$ *et à l'aide de la formule de* LEIBNIZ, *exprimer* $f^{(n+1)}$ *pour* $n\geqslant 1$ *en fonction des dérivées précédentes, et en déduire la formule de récurrence*

$$f^{(n+1)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)f^{(n-k)}(x) \qquad \text{et en particulier} \qquad a_{n+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}a_ka_{n-k}.$$

En observant le signe de $f^{(k)}$ *sur* $[0,\pi/2[$, *montrer que la série* $\sum_n a_nx^n$ *converge pour* $|x|<\pi/2$. *On note* g *la fonction définie par sa somme. Prouver que* g *vérifie l'équation différentielle* $g'=1+g^2$, *et conclure.*

EXERCICE 19. *Montrer que* $z \mapsto \sum_{n\geqslant 0} (z+z^2)^n$ *est DSE et donner une relation de récurrence entre les coefficients. Les reconnaître. On introduira une série double (sommabilité ?).*

EXERCICE 20. *Rayon de CV et somme de* $\sum \left(\int_0^{\pi/4} \tan^n t \, dt\right) x^n$ *?*

EXERCICE 21. *Rayon de CV de* $\sum_{n\geqslant 0} \binom{2n}{n} x^n$ *? On note* $f(x)$ *sa somme, quand elle existe ; * écrire* $f(x)$ *comme CL de* $f'(x)$ *et* $xf'(x)$, *en déduire* f, *puis la valeur (simple !) de* $\sum_{n=0}^{p} (-1)^n \binom{2n}{n}\binom{2p-2n}{p-n}$.

EXERCICE 22. *On appelle* ***dérangement*** *une permutation* $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ *qui n'a aucun point fixe :* $\forall k = 1 \dots n \ \sigma(k) \neq k$.
On note a_n *le nombre de dérangements de* $1 \dots n$ *(par convention* $a_0 = 1$*). Montrer en discutant sur le nombre* k *des points fixes d'une permutation quelconque que*

$$a_n = n! - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \binom{n}{k}$$

En déduire, à l'aide de $f(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n \frac{x^n}{n!}$ *(indic : produit de* CAUCHY*), que* $a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!}$.
Quelle est la limite de $a_n/n!$ *quand* $n \to +\infty$ *? (c'est la probabilité, si chacun en sortant du bal reprend un chapeau au hasard, que personne n'ait repris son propre chapeau)*

EXERCICE 23. ***Nombres de*** **CATALAN.**
On note C_n *le nombre de* ***parenthèsages possibles*** *d'un produit de* n *termes. Ainsi pour faire le produit* abc *on a* $C_3 = 2$ *possibilités :* $a(b \times c)$ *ou* $(a \times b)c$.
Après avoir calculé C_4, *démontrer la formule de récurrence*

$$C_1 = 1 \qquad C_n = \sum_{k=1}^{n-1} C_k C_{n-k} \qquad \forall n \geqslant 2$$

En supposant que la série $\sum_{n\geqslant 0} C_n x^n$ *ait un rayon de convergence* $R > 0$, *et en posant par commodité* $C_0 = 0$, *trouver une relation simple vérifiée par sa somme* $\varphi(x)$ *sur* $]-R, R[$. *En déduire une expression de* $\varphi(x)$, *vérifier que* φ *est effectivement DSE dans un voisinage de l'origine pour justifier* ***a posteriori*** *le calcul fait, puis exprimer la valeur de* C_n *avec un coefficient binomial.*

EXERCICE 24. ** (X MP) Soit* $a \in]1, +\infty[$ *et* $\zeta(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^x}$, *définie pour* $x > 1$.
Montrer que ζ *est* $\mathcal{C}^\infty$ *et exprimer* $\zeta^{(k)}(a)$.
Montrer pour $|s| < a - 1$ *la relation*

$$\frac{1}{n^{a+(s-a)}} = \frac{1}{n^a} \sum_{k\geqslant 0} \frac{(s-a)^k (-\ln n)^k}{k!}$$

Montrer que la famille $\left(\frac{(s-a)^k(-\ln n)^k}{k! n^a}\right)_{(n,k)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}}$ *est sommable.*
En déduire que $\zeta : s \mapsto \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^s}$ *est DSE (somme de sa série de* TAYLOR*) au voisinage de tout* $a > 1$, *c'est à dire que*

$$\zeta(s) = \zeta(a) + (s-a)\frac{\zeta'(a)}{1!} + \dots + (s-a)^k \frac{\zeta^{(k)}(a)}{k!} + \dots$$