EXERCICE 1. ***Ah, vous croyez ça ?***

On considère la fonction $f : x \mapsto x\sin(1/x)$ *(avec* $f(0) = 0$*). Est-ce que* f *change de signe à l'origine ? Quelle est la racine suivant immédiatement 0 ?*

On considère $g(x) = x^2 \sin(1/x)$ *et* $g(0) = 0$*. Montrer que* g *est dérivable en tout point de* $\mathbb{R}$*, notamment en 0, mais que* $g'(x)$ *ne converge nullement quand* $x \to 0$*. Voir néanmoins l'exercice 9.*

Construire une fonction f *de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *qui tende vers 0 en* $+\infty$*, mais telle que* f' *diverge en* $+\infty$*. Cf. néanmoins l'exercice 2.*

EXERCICE 2. f *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$ *et* $f + f' \to \ell$ *en* $+\infty$*.*

** Montrer que* $f' \to 0$ *en* $+\infty$ *(i.e.* $f \to \ell$*).*

On posera $f' + f = g$ *et on intègrera cette équation différentielle, en considérant* f *comme l'inconnue.*

EXERCICE 3. ** On considère* f *définie et continue de* $]-a, a[$ *dans* E*, telle que* $f(0) = 0$*.*

Montrer que f *est dérivable en 0 ssi le rapport* $\dfrac{f(x) - f(x/2)}{x}$ *converge en 0 (encadrer).*

EXERCICE 4. ***Dans*** $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$***.***

On considère deux applications dérivables A, B *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$*.*

Montrer que les applications $A.B, A^n$ $(n \in \mathbb{N}), A^{-1}, \det A$ *sont dérivables et calculer leurs dérivées.*

Trouver tous les morphismes dérivables de $\mathbb{R}$ *dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$*, i.e. les applications telles que* $A(s+t) = A(s) \times A(t)$*.*

EXERCICE 5. *Un promeneur parcourt 6 km en une heure. Montrer qu'il existe au moins une période de 30 minutes pendant laquelle il parcourt exactement 3 km.*

EXERCICE 6. $f : \mathbb{R} \to E$ *est dérivable en 0,* $f(0) = 0$*. Calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\dfrac{k}{n^2})$*.*

EXERCICE 7. *Soit* $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, E)$ *telle que* f *et* f'' *soient bornées. En développant* $f(x \pm h)$ *par l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que*

$$\forall h > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \|f'(x)\| \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{h} + \frac{h}{2}\|f''\|_\infty$$

et en déduire une majoration de $\|f'\|_\infty$ *(une des inégalités de* KOLMOGOROV*).*

EXERCICE 8. *Donner plusieurs exemples de fonctions dérivables de* $\mathbb{R}$ *dans un espace de dimension finie qui ne vérifient pas le théorème des accroissements finis.*

EXERCICE 9. ***Thm de* DARBOUX.**

Montrer que toute dérivée **réelle** *possède la PVI (propriété des valeurs intermédiaires), i.e. si f est une application dérivable de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, alors $f'([a,b])$ est un intervalle.*
Exemple : on considère les applications nulles en 0 définies ailleurs par

$$\forall x \neq 0,\ f(x) = \sin\frac{1}{x} \qquad g(x) = \cos\frac{1}{x}.$$

Montrer que f et g sont des dérivées, grâce à une intégration par parties, puis que f^2, g^2 ont toutes deux la PVI, mais que l'une au moins des deux n'est pas pour autant une dérivée.

EXERCICE 10. Application du théorème de Darboux

Soit f une application d'un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$, dérivable. On suppose que f' s'annule sur les irrationnels ($f'^{-1}(0) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$). Montrer que l'image de f' est dénombrable. Que dire d'une partie dénombrable de $\mathbb{R}$ qui vérifie la propriété des valeurs intermédiaires ? Conclure.

EXERCICE 11. *Soit $f : \mathbb{R} \to E$ de classe $\mathcal{C}^n$. Montrer que $g(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ se prolonge par continuité en 0 et que g ainsi définie sur $\mathbb{R}$ est en fait de classe... combien ? (on pourra penser à écrire une intégrale).*

EXERCICE 12. *On considère une fonction f développable en série entière sur le disque $D(0,R) \subset \mathbb{C}$: $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.*
Montrer que $\sum n a_n z^{n-1}$ converge sur le même disque. On notera $f'(z)$ sa somme – extension du cas z réel ou de la dérivée d'un polynôme.
On pose $z = x + iy$ et $F(x,y) = f(z)$. Montrer aussi que $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ sont bien définies en tout point du disque et préciser le lien avec $f'(z)$.
En déduire que toute fonction DSE est en fait $\mathcal{C}^\infty$ comme fonction à deux variables d'un disque de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Que dire de son Laplacien $\Delta F = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$?

EXERCICE 13. *DL à l'ordre 5 de l'unique solution (admis) de l'ED $y' = \sin(xy)$ qui vérifie $y(\sqrt{3\pi/2}) = \sqrt{3\pi/2}$?*