Équations différentielles

EXERCICE 1. Équations linéaires d'ordre 1 (révision. . .).

Résoudre le plus complètement possible les équations suivantes :

$xy'-2y=(x-1)(x+1)^3 \qquad y'\sqrt{1+x^2}-y=x+\sqrt{1+x^2} \qquad t^3x'-2x=0 \qquad x'\cos t+x\sin t=\cos^3 t$

$*$ *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ $\quad xy'+|y|=x^2+\dfrac{3}{2}, \quad y(1)=-1$

Résoudre $y'=|y-x|$ *(on résoudra d'abord* $y'=y-x$ *et* $y'=x-y$*).*

EXERCICE 2. *Soit* $\lambda>0$ *donné, et l'équation* $(1+x)(xy'+\lambda y)=1$.

a) *Donner* **LA** *solution définie pour* $x>0$ *qui a une limite finie en 0.*

b) *Quelles sont les solutions DSE en 0 ? Comparer.*

EXERCICE 3. *Résoudre sous forme intégrale* $x^2y'+y=x^2$ *pour* $x>0$, *pour* $x<0$. *Recollement ? Solution DSE ?*

EXERCICE 4. Champagne ! *On peut imaginer qu'une bulle de champagne va s'accroître, quand elle s'élève dans le verre, en rencontrant le gaz dissout dans le liquide ; si la pression dans la bulle et la densité de CO2 dans le liquide et la constante d'accrétion sont constantes, alors la variation du volume de la bulle sera proportionnelle à sa surface. Écrire l'équation différentielle correspondante. La transformer en l'équation satisfaite par le* **rayon** *de la bulle (supposée sphérique), et résoudre cette dernière équation.*

Nb : la croissance exponentielle trouvée est corroborée par les expériences menées à l'université de Reims. Des expériences sérieuses.

Systèmes linéaires d'ordre 1

EXERCICE 5. *Résoudre les systèmes suivants :*

$$\begin{cases} x'+x+y = t^2 \\ y'+y+z = t \\ z'+z = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = y-x \\ y' = z-y \\ z' = x-z \end{cases} \qquad \begin{cases} tx' = x - ty \\ ty' = tx + y \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = y \\ t^2y' = -2x + 2ty \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x' = (1+m)x + (m-1)y + (1-m)z - 2m \\ 2y' = mx + my - mz + 2m(e^{mt}-1) \\ 2z' = x - y + z + 2me^{mt} \end{cases}$$

EXERCICE 6. Coefficients constants.

Résoudre $X'=A.X$ *quand* $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. *En déduire* $\exp A$.

EXERCICE 7. *On considère une matrice* $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *qui est diagonalisable dans* $\mathbb{C}$. *Montrer que toute solution* $X(t)$ *de* $X'=AX$ *tend vers 0 quand* $t\to+\infty$ *si et seulement si les valeurs propres de* A *(dans* $\mathbb{C}$*) ont toutes une partie réelle* <0.

EXERCICE 8. $A \in M_3(\mathbb{R})$, *on suppose que* $\det A = 0$. *Montrer que toutes les courbes intégrales des solutions de* $X' = AX$ *dans* $\mathbb{R}^3$ *sont planes.*
$\star$ *On suppose de plus que* $A^3 = 0 \neq A^2$. *Reconnaître ces courbes.*

EXERCICE 9. *Résoudre* $\begin{cases} x' = ax + by + cz \\ y' = ay + bz \\ z' = az \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x'' = 3x + y + t \\ y'' = 2x + 2y + \sin 2t \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x'' = x' + y' - y \\ y'' = x' + y' - x \end{cases}$

EXERCICE 10. *Résoudre* $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = y + z \\ z' = z \end{cases}$ *à la main, puis via une exponentielle de matrice.*

EXERCICE 11. *Plus abstrait. Trouver tous les morphismes dérivables de* $(\mathbb{R}, +)$ *dans* $(GL_n(\mathbb{C}), \circ)$ *(montrer qu'ils vérifient une relation du type X'=AX).*

EXERCICE 12. **Romantique. . .** *L'amour de Roméo pour Juliette est mesuré par* x, *et l'affection réciproque que porte Juliette à Roméo est mesurée par* y *(U.S.I.). Ces grandeurs évoluent dans le temps selon la loi commune (« avec le temps, va, tout s'en va. . . ») :*

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

a) *Quel est le sens physique (ou psychologique) de chacun des coefficients* a, b, c, d *? Par exemple, que dire de Roméo si* $a < 0$ *?*
b) *Étudier le comportement du vecteur* (x, y) *quand* $t \to +\infty$, *en s'intéressant aux valeurs propres de la matrice du système. On trouvera des CNS sur* a, b, c, d *pour que :*
— x *et* y *tendent vers* $+\infty$
— $|x| + |y|$ *tende vers* $+\infty$
— x *et* y *tendent vers* 0
— x *et* y *soient des fonctions périodiques du temps.*
(on procèdera à un changement de base, sans s'interroger sur le sens moral ou psychologique d'une CL de Roméo et Juliette. . .)

Équations linéaires scalaires

EXERCICE 13. *Résoudre*
$y'' - y = xe^{-x}$ $\quad y'' + y = \sin x$ $\quad xy'' + 2y' + xy = 0$ *(on pourra chercher une solution DSE)*
$x^2y'' = 2y$ *quelles sont les solutions sur* $\mathbb{R}$ *? (poser* $x = e^u$ *ou encore* $y = (\pm x)^\alpha$*)*
$(2x + 1)y'' + (4x - 2)y' - 8y = 0$ *(chercher une solution exponentielle)*
$(1 - x^2)y'' + 2xy' = 2y$ *(chercher une sol simple. . .)* $\quad (1 + x^2)^2 y'' + 2x(1 + x^2)y' + y = 0$
$y'' \cos x + y' \sin x + y \cos^3 x = 0$ *(chercher une solution en* $e^{iu(x)}$*)*

EXERCICE 14. *Résoudre* $f'(x) + f(-x) = \cos x$.
Idem avec $f'(x) = e^{-x} + \int_0^x f(t)\,dt$ *(CCP 2017).*

EXERCICE 15. *Montrer que les solutions de* $f'''(x) + f'(x) + f(x) = 0$ *qui tendent vers 0 quand* $x \to -\infty$ *constituent un plan vectoriel (étudier* $X^3 + X + 1 \in \mathbb{C}[X]$*).*

EXERCICE 16. *Donner une base de l'espace des solutions* **réelles** *de*
$f^{(vi)} + f^{(v)} + f^{(iv)} + f^{(iii)} + f'' + f' + f = 0$. *Généraliser.*

EXERCICE 17. *solutions en* $|t|^a$ *de* $t^2x'' - 2tx' + 2x = 0$ *? résoudre* $t^2x'' - 2tx' + 2x = t^3 \cos t - 6$.

EXERCICE 18. *Montrer qu'il existe une matrice* $M(t)$ *telle que pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *et toute solution* x *de* $x'' + ax' + bx = 0$ *(*a, b *sont des fonctions continues données) on ait* $\binom{x(t)}{x'(t)} = M(t)\binom{x(0)}{x'(0)}$. *On pourra exprimer* x *en fonction des deux solutions* g, h *caractérisées respectivement par* $g(0) = h'(0) = 1, g'(0) = h(0) = 0$. *Montrer que* $\det M(t) = e^{\int_0^t a}$.

EXERCICE 19. *Résoudre* $y'''' - \dfrac{15}{4}y'' - y = -e^{2t}$.

EXERCICE 20. **Un peu de théorie. . .**

** On considère une fonction continue* q *telle que* $\int_0^{+\infty}|q|$ *converge, et l'équation* $y'' + qy = 0$ *sur* $\mathbb{R}_+$.

a) *Si* f *est une solution bornée sur* $\mathbb{R}_+$*, montrer que* f' *admet une limite en* $+\infty$*. Que vaut alors cette limite ?*

b) *Montrer que deux solutions* (f, g) *bornées sont nécessairement liées (étudier* $W = f'g - fg'$*). Qu'en déduire ?*

EXERCICE 21. *Montrer que toute solution de* $y'' e^{-x^2} + y = 0$ *est bornée sur* $\mathbb{R}$ *(multiplier par* y'*).*

EXERCICE 22. *On considère l'équation* $(E) \quad y'' - e^x y = 0$.

** Montrer que toute solution s'annule au plus une fois sur* $\mathbb{R}$ *(X 2017).*

Soit φ *la solution telle que* $\varphi(0) = \varphi'(0) = 1$*. Que dire de* φ'' *au voisinage de 0 ? Montrer que*

$$\forall x \geqslant 0 \ \varphi(x) \geqslant x + 1.$$

On pose $\psi(x) = \varphi(x) \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{1}{\varphi^2}$*. Montrer que* ψ *est bien définie sur* $\mathbb{R}_+$, $\mathcal{C}^2$ *et qu'elle est solution de* (E)*, et bornée.*

Que dire de toute autre solution de (E) *qui soit bornée sur* $\mathbb{R}_+$ *?*

EXERCICE 23. *On pose* $U_n = (X^2 - 1)^n$ *et* $L_n = \dfrac{1}{2^n n!} D^n(U_n) = \dfrac{1}{2^n n!} U_n^{(n)}$ *: c'est un polynôme de degré* n *(polynômes de Legendre, qui forment une base orthogonale pour le produit scalaire* $\int_{-1}^{1} f \times g$*).*

0) Vérifier que $L_n(1) = 1, L_n(-1) = (-1)^n$.

1) Montrer que $(X^2 - 1)U_n' = 2nXU_n$*. Dériver* $n+1$ *fois cette relation, en déduire avec la formule de Leibniz que*

$$(X^2 - 1)L_n'' + 2XL_n' = n(n+1)L_n$$

2) On a donc trouvé des vecteurs propres pour l'opérateur différentiel $\Delta : P \mapsto (X^2 - 1)P'' + 2XP'$ *de l'espace des polynômes :* L_n *est vecteur propre associé à la v.p.* $\lambda_n = n(n+1)$.

En calculant le wronskien W de deux solutions de l'équation

$$(X^2 - 1)P'' + 2XP' - n(n+1)P = 0,$$

montrer que toute solution supposée $\mathcal{C}^2$ *sur* $[-1, 1]$ *est proportionnelle à* L_n *(indication : on montrera que toute solution linéairement indépendante de* L_n *diverge en* ± 1*).*

Les espaces propres de Δ *sont donc des droites.*

(NB : il existe bien entendu d'autres solutions puisque l'équation est d'ordre 2, mais elles divergent en ± 1.)

3) (subsidiaire : espaces euclidiens)

Montrer que Δ *est symétrique pour le produit scalaire susmentionné, et retrouver que les* (L_n) *forment une famille orthogonale.*

EXERCICE 24. Justifier la linéarisation ?

On vous a enseigné comment "résoudre" l'équation du pendule $(\mathcal{P})$ $y'' + \omega^2 \sin y = 0$ *par linéarisation, en la remplaçant par* $y'' + \omega^2 y = 0$ *pour* y *petit. Mais qui prouve* a priori *qu'il va le rester ?... Bref :*

Soit y *l'unique solution de* $(\mathcal{P})$ *telle que* $y(0) = y_0$ *et* $y'(0) = 0$*, définie sur* $\mathbb{R}$ *(existence et unicité se prouvent).*

1. *Montrer que* y *vérifie la relation* $y'^2 = 2\omega^2(\cos y - \cos y_0)$ (EC) *et en déduire que* y *reste dans l'intervalle* $[-y_0, y_0]$*.*
2. *Montrer que* y *est concave dans un voisinage de 0, commencer l'esquisse de son graphe. On va montrer par l'absurde que* y *change de concavité et s'annule.* **Supposons que** $y > 0$ **sur** $\mathbb{R}_+$*. Montrer qu'alors* y *décroît et reste concave sur cet intervalle, puis en considérant une tangente en un* $t_0 > 0$ *amener la contradiction voulue.*
3. *On a établi que* $\{t > 0 \mid y(t) = 0\}$ *est non vide. Montrer que cet ensemble est fermé et qu'il possède un minimum, que l'on notera* τ*.*
4. *Montrer que* y *est paire. On considèrera la fonction* $\varphi : t \mapsto y(-t)$ *et on montrera qu'elle vérifie aussi* $(\mathcal{P})$ *avec les mêmes conditions initiales. Compléter le graphe de* y*.*
5. *On pose* $\psi : t \mapsto -y(2\tau - t)$*. Montrer de façon similaire que* ψ *coïncide avec* y*. Interpréter géométriquement cette symétrie, puis en déduire que* $y(t + 2\tau) = -y(t)$ *et enfin que* $T = 4\tau$ *est période de* y *(la solution est bien périodique).*
6. *Justifier que* $t \mapsto y(t)$ *est une bijection de* $[0, \tau]$ *sur* $[y_0, 0]$ *et que sa fonction réciproque est* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[0, y_0[$ *et de dérivée* $\dfrac{dt}{dy} = \dfrac{-1}{\omega\sqrt{2(\cos y - \cos y_0)}}$*.*
7. *En déduire que* $\tau = \displaystyle\int_0^\tau dt = \int_0^{y_0} \frac{dy}{\omega\sqrt{2(\cos y - \cos y_0)}} = \int_0^{y_0} \frac{dy}{2\omega\sqrt{2(\sin^2 \frac{y_0}{2} - \sin^2 \frac{y}{2})}}$*.*
8. *En déduire une expression plus sympathique (?),* $T = 4\tau = \dfrac{4}{\omega}\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - x^2 \sin^2 \frac{y_0}{2})}}$*.*
9. *Que retrouve-t-on pour* y_0 *très petit ? Donner plus précisément un DL à l'ordre 2 de* 4τ *en fonction de* y_0*. Pour quelles valeurs de* y_0 *peut-on considérer la période des oscillations comme constante à 1% près ? Quelle erreur cela donne-t-il par jour sur une horloge ?*

EXERCICE 25. *Le système de* LORENZ

$$\begin{cases} x' = 10(y - x) \\ y' = 28x - y - xz \\ z' = xy - \dfrac{8}{3} z \end{cases}$$ *est célèbre pour son attracteur étrange.*

Contentons-nous de répondre à des questions simples :

- *y a-t-il des solutions constantes ?*
- *Vérifier qu'une solution passant par* $(0, 0, a)$ *tend vers l'origine quand* $t \to +\infty$*.*
- *(ordi) Résoudre le système « linéarisé »(en se limitant aux termes d'ordre 1). Allure des trajectoires ?*