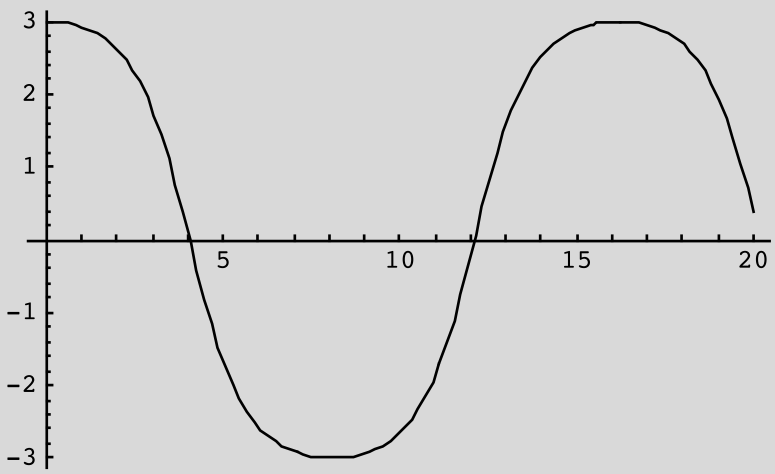
Étude du pendule simple

On écrit l'équation du pendule comme un système du premier ordre:

```
PenduleRule = NDSolve[{x'(t) == y(t), y'(t) == -sin(x(t)), x(0) == 3, y(0) == 0},
    {x, y}, {t, 0, 20}, MaxSteps → 200];
```

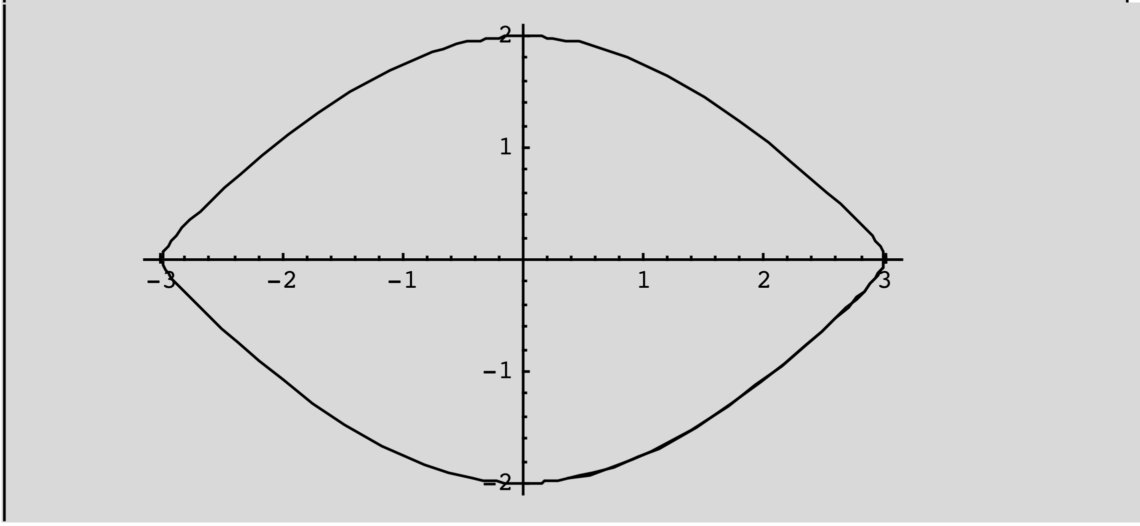
On trace ainsi une solution :

```
ParametricPlot[Evaluate[{t, x(t)} /.PenduleRule], {t, 0, 20}, PlotPoints → 100];
```



L'hodographe (courbe de (y, y')) est plus parlant

```
ParametricPlot[Evaluate[{x(t), y(t)} /.PenduleRule], {t, 0, 20}, PlotPoints → 100];
```



On peut obtenir plus facilement le *portrait des phases :*

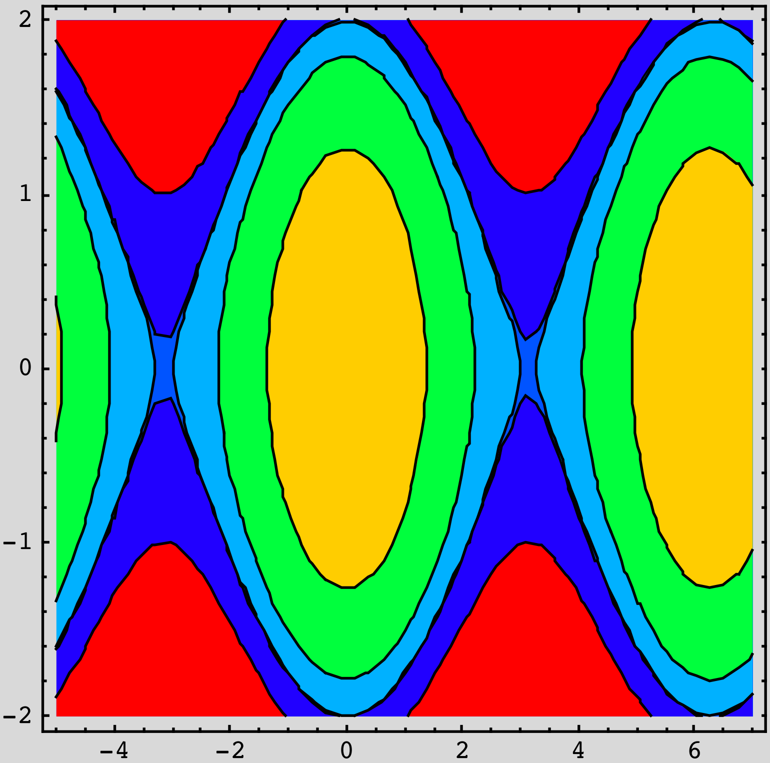
$$\int (\sin(x(t))\, x'(t) + x''(t)\, x'(t))\, dt$$

$$\frac{1}{2}\left(x'(t)^2 - 2\cos(x(t))\right)$$

```
% /.{x(t) → x, x'(t) → y}
```

$$\frac{1}{2}\left(y^2 - 2\cos(x)\right)$$

$$\text{ContourPlot}\left[\frac{y^2}{2} - \cos(x), \{x, -5, 7\}, \{y, -2, 2\}, \text{ColorFunction} \to \text{Hue}, \text{PlotPoints} \to 50, \text{Contours} \to \{-1, -0.2, 0.6, 0.99, 1.01, 1.5\}\right];$$



On distingue nettement la "catastrophe" du passage à un régime non périodique.

Étudions la période du mouvement du pendule lâché sans vitesse initiale:

$$T = 2\sqrt{2}\int_0^{t0} \frac{1}{\sqrt{\cos(t) - \cos(t0)}}\, dt$$

- **On la trouve en exprimant le temps en fonction de l'angle. On a par changement de variable:**

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\cos(t)-\cos(t0)}}\ /.\cos(t)\to\frac{1-u^2}{u^2+1}$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{1-u^2}{u^2+1}-\cos(t0)}}$$

- **N' oublions pas dt et du : $u=\frac{\tan t\ldots}{2}$**

$2\,\text{du}=\left(u^2+1\right)\text{dt}$

$$\text{integrande} = \text{Simplify}\left[\frac{\%\,2}{u^2+1}\right]$$

$$\frac{4\sqrt{2}}{\left(u^2+1\right)\sqrt{\frac{1-u^2}{u^2+1}-\cos(t0)}}$$

- **Pour aller plus loin, mettons ceci au carré:**

$$\text{Simplify}\left[\text{integrande}^2\right]$$

$$\frac{32}{-\cos(t0)\,u^4-u^4-2\cos(t0)\,u^2-\cos(t0)+1}$$

$$\text{toto} = \text{Factor}[\text{Denominator}[\%]]$$

$$\left(u^2+1\right)\left(-\cos(t0)\,u^2-u^2-\cos(t0)+1\right)$$

- **Ecrivons ça autrement:**

$$2\cos^2\left(\frac{t0}{2}\right)\left(u^2+1\right)\left(\tan^2\left(\frac{t0}{2}\right)-u^2\right);$$

- **Ceci suggère un dernier changement de variable : $u = x \tan\left(\frac{t0}{2}\right)$; cela donne**

$$\text{periode} = \int_0^1 \frac{4}{\cos\left(\frac{t0}{2}\right)\sqrt{(1-x^2)\left(x^2\tan^2\left(\frac{t0}{2}\right)+1\right)}}\,dx$$

- **À défaut d'une expression complète (que l'on peut obtenir par le package "Calculus`EllipticIntegrate`" et pas mal de travail supplémentaire…) on peut regarder ce qui se passe pour t0 voisin de 0:**

$$\text{Normal}\left[\text{Series}\left[\frac{4}{\cos\left(\frac{t0}{2}\right)\sqrt{(1-x^2)\left(x^2\tan^2\left(\frac{t0}{2}\right)+1\right)}}, \{t0, 0, 4\}\right]\right]$$

$$4\left(-\frac{x^2}{64\sqrt{1-x^2}}+\frac{\frac{3x^4}{32}-\frac{x^2}{12}}{4\sqrt{1-x^2}}+\frac{5}{384\sqrt{1-x^2}}\right)t0^4 + 4\left(\frac{1}{8\sqrt{1-x^2}}-\frac{x^2}{8\sqrt{1-x^2}}\right)t0^2+\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{Apart}\left[\text{Expand}\left[\int_0^1 \%\,dx\right]\right]$$

$$\frac{11\pi\, t0^4}{1536}+\frac{\pi\, t0^2}{8}+2\pi$$

$$\text{periode} = 2\pi\left(\frac{11\, t0^4}{3072}+\frac{t0^2}{16}+O\left(t0^6\right)+1\right)$$