Intégrales sur un intervalle quelconque

Calculs : techniques de base *:*

EXERCICE 1. *Établir une relation de récurrence entre les primitives* $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$. *On pourra déjà intégrer par parties* $\int \frac{2x}{(x^2+1)^2}\, x\, dx$.

EXERCICE 2. *Calculer des primitives des fonctions suivantes, en précisant leur domaine de validité :*

$$\frac{1}{\operatorname{ch}^3 x} = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch}^4 x} \qquad \frac{1}{-1+i\sqrt{3}+x} \qquad \frac{x\, e^x}{\sqrt{1+e^x}} \qquad \frac{x}{\sin^2 x} \qquad \frac{1}{\operatorname{ch} x + \cos\theta} \qquad \left(\frac{x}{e}\right)^x \ln x$$

$$\frac{1}{1+x^3} \qquad \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\ (x = \cos(2t)) \qquad \frac{\arctan x}{\sqrt{x}} \qquad e^{\operatorname{Arc}\sin x} \qquad \sin(\ln x) \qquad \sqrt{e^x - 2}$$

$$\ln(1+\sqrt{x}) \qquad \frac{\sqrt{t^3+1}}{t^4} \qquad \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x} \qquad \frac{1}{\sqrt[3]{x^3-x}}\ \left(t = \frac{\sqrt[3]{x^3-x}}{x}\right) \qquad \operatorname{Arc}\sin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)$$

$$\frac{1}{\sin^4 t + \cos^4 t} \qquad \ln(1+t^2) \qquad \frac{1}{\sin x + \cos x} \qquad \frac{\cos x}{4+\sin^3 x} \qquad \frac{1}{\sin x + \sin 2x}\ (u = \cos x)$$

EXERCICE 3. *On fixe deux entiers strictement positifs* a, b *et l'on pose* $P_n(X) = \frac{X^n}{n!}(bX-a)^n$.
a) Montrer (en distinguant trois cas) que P *et toutes ses dérivées prennent des valeurs entières en 0 et en* a/b.
b) On pose $I_n = \int_0^\pi P_n(t) \sin t\, dt$. *Que fait la suite* P_n *sur tout compact ? en déduire le comportement de la suite* (I_n).
c) Montrer que si $a/b = \pi$ *alors pour tout* n *on aurait* $I_n \in \mathbb{Z}^*$. *En déduire que* π *est irrationnel.*

EXERCICE 4. Intégrables ou pas ?

$$\int_0^{+\infty} \frac{P}{Q}\ \textit{(fraction rationnelle)} \qquad \int_{]0,\pi/2]} \cos\frac{1}{t^2}\, dt \qquad \int_0^{+\infty} \sin(\tan(\cos^{2042} t))\, dt \qquad \int_0^{+\infty} \operatorname{Arg}\operatorname{ch}\frac{t+1}{t}\, dt$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^{\cos(1/x)}} \qquad \int_5^{+\infty} \frac{dx}{(\ln\ln x)^{\ln x}} \qquad \int_2^{+\infty} \frac{dx}{(\ln x)^{\ln\ln x}} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(1/t^2)}{\ln(1+\sqrt{t})}\, dt \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x\ln(2+x^2)}\, dx$$

EXERCICE 5. ***Ruses !*** *Convergence et valeur de* $\displaystyle\int_{]0,\pi/2[} \ln(\sin t)\, dt$, $\displaystyle\int_{]0,\pi/4[} \ln(1+\tan t)\, dt$, $\displaystyle\int_{]a,b[} \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$

EXERCICE 6. *On suppose que* $\int_{\mathbb{R}} f$ *existe et* $\int_{\mathbb{R}} h$ *aussi, soit* g *une fonction « entre les deux » :* $f \leqslant g \leqslant h$ *sur* $\mathbb{R}$. *Montrer que* $\int_{\mathbb{R}} g$ *converge.*

EXERCICE 7. *Calculer* $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$ *pour* $n > 1$ *[on trouvera une combinaison de logarithmes], puis plus facilement* $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

EXERCICE 8. *Montrer que* $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3/2}{(x^6+1)}\, dx = \pi$.

EXERCICE 9. *Calcul de* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2}\,dt$.

Établir l'existence de cette intégrale pour $a > 0$.

Par un découpage et un changement de variable, montrer que cette intégrale est nulle quand $a = 1$ *; en déduire sa valeur dans le cas général.*

EXERCICE 10. *Calculer* $B(p,q) = \displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q\,dt$ *où* p *est entier et* $q > -1$. $\displaystyle\int_0^1 \arctan \sqrt[3]{t}\,dt$.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{(\cos t)^{\sin t}}{(\cos t)^{\sin t} + (\sin t)^{\cos t}}\,dt \qquad \textit{Cette dernière en calcul mental!!!}$$

EXERCICE 11. *Montrer que* $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{3\varepsilon} \frac{\sin x}{x^2}\,dx = \ln 3$. *On pourra arguer que* $\int_0^{\varepsilon} O(f) = O\left(\int_0^x f\right)$.

EXERCICE 12.

1) Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^2}\,dx$ *est convergente.*

2) On veut calculer cette intégrale. Que pensez vous du calcul suivant :

$$\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x) \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^{\infty} \frac{3\sin x - \sin 3x}{x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\infty} \frac{3\sin x - 3x + 3x - \sin 3x}{x^2}\,dx = \frac{3}{4}\int_0^{\infty} \frac{\sin x - x}{x^2}\,dx - \frac{1}{4}\int_0^{\infty} \frac{\sin 3x - 3x}{x^2}\,dx$$

(le $3x$ *est introduit pour garder la convergence de l'intégrale en 0)*

$$\underset{(t=3x)}{=} \frac{3}{4}\int_0^{\infty} \frac{\sin x - 3x}{x^2}\,dx - \frac{1}{4}\int_0^{\infty} \frac{t - \sin t}{t^2} 3\,dt = 0?$$

3) Calculer I *plus efficacement, en revenant à la définition :*

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{X} \frac{\sin^3 x}{x^2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\frac{3}{4}\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx - \frac{1}{4}\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\sin 3x}{x^2}\,dx \right) = \ldots \qquad \textit{(cf. Exo } \textbf{11}\textit{)}.$$

EXERCICE 13.

• *Montrer que si* f' *est intégrable sur* $\mathbb{R}_+$, *alors* $\lim_{+\infty} f$ *existe. Réciproque ?*

• *En utilisant des séries, étudier l'intégrabilité sur* $I = [0, +\infty[$ *de* $x \mapsto x e^{-x^6 \sin^2 x}$ *ou encore* $x \mapsto e^{-x^2 |\sin x|}$. *Noter que ces fonctions ne tendent pas vers 0 en* $+\infty$...

• f *est intégrable sur* $[0, +\infty[$ **et de plus décroissante**. *Montrer que* $f(x) \to 0$ *et même* $x f(x) \to 0$ *quand* $x \to +\infty$ *(considérer* $\int_{x/2}^{x} f$*). Contre-exemple quand* f *n'est pas décroissante ? (cf. début exo)*

EXERCICE 14. *Si* f *continue admet des limites en 0 et* $+\infty$, *calculer*

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t}\,dt = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ A\to+\infty}} \int_{\varepsilon}^{A} \frac{f(at) - f(bt)}{t}\,dt \textit{ en utilisant vigoureusement } g(u) = \int_{au}^{bu} \frac{f(t)}{t}\,dt.$$

EXERCICE 15. *** (Dans notre série « je suis fan des calculs bourrins »)*

Décomposer en éléments simples et intégrer de 0 à $+\infty$ la fraction $\dfrac{t^p}{1+t^{2q}}$. *On pourra commencer par primitiver* $1/(t-\xi)$, *où* $\xi = e^{i\theta}$, *et utiliser furieusement la formule donnant le résidu en* ξ, *pôle simple de la fraction* P/Q :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{\prod\limits_{\xi \text{racine de } Q} (x-\xi)} = \ldots + \frac{P(\xi)/Q'(\xi)}{x-\xi} + \ldots$$

En déduire par changement de variable, puis par densité des rationnels parmi les réels, la formule

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^{\alpha}} = \frac{\pi}{\alpha \sin \pi/\alpha}$$

EXERCICE 16. *Existence et, pour les sportives, valeurs, des intégrales suivantes :*

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{t(1-t)^3}}\, dt \qquad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3(1-x)}} \qquad \int_0^1 \frac{\ln x \ln(1-x)}{x}\, dx \quad \textit{(somme de série)}$$

EXERCICE 17. *Soit* $f \in \mathcal{C}^1([0,1];\mathbb{R})$ *telle que* $f(0) = f(1) = 0$. *On pose*

$$I = \int_0^1 \frac{f'(t)f(t)}{\tan \pi t}\, dt \qquad J = \int_0^1 \frac{f^2(t)}{\tan^2 \pi t}(1+\tan^2 \pi t)\, dt$$

a) Trouver une relation entre I *et* J.
b) Écrire $\int_0^1 (f'^2 - \pi^2 f^2)$ *comme l'intégrale d'un carré, en déduire que* $\int_0^1 f'^2 \geqslant \pi^2 \int_0^1 f^2$ *et discuter le cas d'égalité.*

Approximation par des fonctions en escalier :

EXERCICE 18. *Pour* $x = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots$ *(développement décimal illimité) on pose* $f(x) = 0, a_2 a_1 a_4 a_3 a_6 a_5 \ldots$.
En faisant intervenir les fonctions $v_n : x \mapsto \lfloor 10^n x \rfloor$, *montrer que* f *est somme d'une série de fonctions en escalier, puis calculer* $\int_0^1 f$.

EXERCICE 19. *En faisant apparaître des fonctions en escalier tendant vers la fonction* $x \mapsto 1/x$, *(ou une somme de* RIEMANN *à pas inégal) montrer que la moyenne des restes de la division de* n *par* $k, k = 1 \ldots n$, *eux-mêmes divisés par* k, *tend vers* $1-\gamma$ *(*γ *= constante d'*EULER*). En résumé :* $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(n \mod k)}{k} \to 1-\gamma$.

EXERCICE 20.
a) Établir que $x^{2n} - 1 = (x^2-1)\prod\limits_{k=1}^{n-1}(x^2 - 2x\cos\dfrac{k\pi}{n} + 1)$. *On groupera les racines complexes par paires conjuguées.*

b) En déduire $I_r = \int\limits_0^{\pi} \ln(1-2r\cos t + r^2)\, dt$ *pour* $r \in]-1,1[$, *puis pour* $|r| > 1$ *(somme de* RIEMANN*).*

** Retrouver ce résultat grâce au théorème de* LEIBNIZ.

EXERCICE 21. *Encadrer* $\sin\theta$ *entre* θ *et un polynôme de degré 3 en* θ, *en déduire* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \sin\dfrac{k}{n}.\sin\dfrac{k}{n^2}$.

Théorèmes sur les suites et séries d'intégrales :

EXERCICE 22. † *En introduisant un prolongement de l'intégrande qui vale 0 sur* $[n, +\infty[$ *et en le dominant par sa limite simple, montrer que*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt$$

Ceci permet de retrouver la formule de WEIERSTRASS, *en calculant l'intégrale dépendant de* n *ci-dessus par changement de variable et intégrations par parties.*

EXERCICE 23. *Limites des expressions suivantes quand* $n \to +\infty$ *:*

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^n + 2} \qquad \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n e^{t/2}\,dt \qquad n\int_0^{1/n} \sin\frac{1}{t}\,dt \qquad \frac{1}{n}\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n e^t\,dt \qquad \int_0^\infty \frac{nf(t)}{1 + n^2 t^2}\,dt$$ *(f $\mathcal{C}^0$ bornée)*

EXERCICE 24. *Pourquoi peut-on subodorer un équivalent en* α/n *pour* $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt$ *? Trouver la limite de* nI_n *quand* $n \to +\infty$.

EXERCICE 25. *(E3A 2020, the return of Cesaro)*
Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite réelle convergente de limite* ℓ.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, *on définit sur* $[0,1]$ *la fonction en escalier* f_n *par :*

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \forall t \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right[, f_n(t) = w_k \quad \textit{et} \quad f_n(1) = w_n.$$

1. *Déterminer* $\int_0^1 f_n(t)\,dt$.
2. *Prouver que l'on a, pour tout* $t \in [0, 1[$, $f_n(t) = w_{\lfloor nt \rfloor + 1}$ *(*$\lfloor x \rfloor$ *= la partie entière du réel* x*).*
3. *En déduire, pour tout* $t \in [0, 1]$, *la valeur de* $\lim_{n\to+\infty} f_n(t)$ *(2 cas).*
4. *Prouver alors que l'on a :* $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n w_k = \ell$ *(quel argument d'interversion choisir ?)*

EXERCICE 26. *Limite de* $I_n = \int_0^1 \frac{dt}{1 + t + \ldots t^n}$ *?*

*** Plus difficile, trouver la vitesse de convergence (* $I_n - \lim I_n \sim \frac{\pi^2}{6n^2}$, *pour commencer il faut développer en série entière l'intégrande, et regrouper les termes deux par deux. . .).*

EXERCICE 27. *1) (partie facile) On pose* $u_n = \int_0^1 (3x^2 - 2x^3)^n\,dx$. *Montrer que* (u_n) *décroît et que sa limite est nulle.*

2) (moins facile !) Montrer que $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{3t^2}{n} + \frac{2t^3}{n\sqrt{n}}\right)^n dt$.

Montrer que ce nouvel intégrande est majoré par e^{-t^2} *sur* $[0, \sqrt{n}]$, *et en déduire un équivalent de* u_n *quand* $n \to +\infty$ *(on donne* $\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}/2$*).*

L'énoncé original faisait conjecturer cet équivalent avec Python avant de le prouver (sans autre indication. . .)

EXERCICE 28. *(CCP MP)*

On pose $u_n(x) = (n+2)(n+1)x^n(1-x)$ *et* $v_n = u_{n-1} - u_n$. *Vérifier que* $\int_0^1 u_n = 1$ *et* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = 0$ *(convergence simple sur* $[0,1]$*). Comparer* $\sum_{n\geqslant 1} \int_0^1 v_n$ *et* $\int_0^1 \sum_{n\geqslant 1} v_n$.

Que peut-on en conclure quant à $\sum_{n\geqslant 1} \int_0^1 |v_n|$ *? * Le vérifier directement (calcul pénible).*

EXERCICE 29. *Exprimer à l'aide de factorielles* $\int_0^{\pi} \cos^n t \, dt$ *en discutant selon la parité de* n *(cf. exercice sur les intégrales de Wallis). En déduire le DSE suivant :*

$$\int_0^{\pi} e^{2x\cos t} \, dt = \pi \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{2n}}{(n!)^2}.$$

EXERCICE 30. *Convergence et valeur de* $\int_0^1 \ln t \ln(1-t) \, dt$ *? (*$\frac{\pi^2}{6}$*).*

Idem avec $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} \, dt$ *et* $\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t} \, dt$.

EXERCICE 31. *En appliquant le théorème de convergence dominée* **aux sommes partielles**, *montrer que* $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{x+n} = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} \, dt$.

Idem pour montrer que $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1} \, dt = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n^2+1}$.

EXERCICE 32. *On fixe une constante* $0 < a < 1$.

Calculer $\int_0^{\infty} e^{-(1-a)t} \, dt$ *et en donner le DSE par rapport à* a.

En appliquant le théorème de convergence dominée **aux sommes partielles**, *montrer* **sans calculer aucune intégrale** *que* $\int_0^{\infty} e^{-(1-a)t} \, dt = \int_0^{\infty} e^{-t} \sum_{n\geqslant 0} \frac{a^n t^n}{n!} \, dt = \sum_{n\geqslant 0} \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{a^n t^n}{n!} \, dt \, dt$.

Démontrer le même résultat avec le 2ème *théorème d'intégration terme à terme.*

En déduire par identification de séries entières la valeur de $\int_0^{\infty} e^{-t} \frac{t^n}{n!} \, dt$.

Extrait du Cours d'Analyse *de Ch. Hermite (1871).*

EXERCICE 33. *(CCP MP)*

On pose pour $x \geqslant 0, n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$. *Montrer que* $\int_0^{\infty} f_n$ *converge et la calculer.*

Établir la convergence de la série $(\sum_{n\geqslant 1} f_n)$ *et vérifier que* $\forall x > 0 \ \sum_{n\geqslant 1} f_n(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

Existence et valeur de l'intégrale $\int_0^{\infty} \sum_{n\geqslant 1} f_n(x) \, dx$ *?*

Que peut-on en déduire sans aucun calcul *de* $\sum_{n\geqslant 1} \int_0^{\infty} |f_n(x)| \, dx$ *?*

EXERCICE 34. *On pose* $I_n = \int\limits_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^n}$. *Existence ? Convergence de la* ***suite*** (I_n) *? De la* ***série*** $(\sum(-1)^n I_n)$ *? * Et* $(\sum I_n)$ *?...*

EXERCICE 35. f *est continue. Par un habile changement de variable (suivi d'un puissant théorème), déterminer la limite de* $\int_0^1 nt^n f(t)\,dt$.

EXERCICE 36. *Montrer que l'intégrale* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ *est* ***semi-convergente*** *(indic : i.p.p.).*

Trouver la relation entre les valeurs de $\int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$ *et* $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt$.

EXERCICE 37. *Montrer que si* f *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *alors* $\int_0^{\pi/2} f(t)\sin(\lambda t)\,dt$ *tend vers 0 quand* $\lambda \to +\infty$.

Montrer que la fonction $h(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}$ *se prolonge de façon* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[0, \pi/2]$.

Montrer que $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt$ *est constante et vaut* $\pi/2$. *En déduire que* $J_n - I_n \to 0$, *où* $J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{t}\,dt$ *; et conclure par la valeur de l'intégrale de Fresnel* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$.

Fonctions définies par une intégrale *:*

EXERCICE 38. *(Calcul de l'intégrale de* GAUSS*).*

On pose $f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$ *et* $g(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$. *Exprimer* f' *puis* f *en fonction de* g, *en déduire la limite de* g *en* $+\infty$.

EXERCICE 39. *(autre calcul de l'intégrale de* GAUSS*).*

On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$. *Montrer que* F *est définie, continue sur* $\mathbb{R}_+$ *et dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$. *Calculer* F *en fonction de* $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$, *puis calculer la limite de* F *en* $+\infty$ *et en déduire enfin la valeur de* I.

EXERCICE 40. *Étude, calcul, de* $x \mapsto \int_0^1 \frac{\ln(1-2t\cos x + t^2)}{t}\,dt$ *pour* $x \in [0, \pi/2]$.

EXERCICE 41. *Étudier la fonction définie par* $x \mapsto \int\limits_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$ *: définition, limites, équivalent en* $+\infty$, *étude près de 1.*

EXERCICE 42. *On cherche un équivalent simple de* $f(x) = \Gamma(x+1) = \int\limits_0^\infty t^x e^{-t}\,dt$.

Montrer (en posant $t = x + y\sqrt{x}$*) que* $f(x) = \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{x} \int\limits_{-\sqrt{x}}^{\infty} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-y\sqrt{x}}\,dy$.

** En s'inspirant de l'exercice 22, montrer ** par convergence dominée que*

$$\int_{-\sqrt{x}}^{\infty} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-y\sqrt{x}}\,dy \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2}\,dy$$

et conclure (la dernière intégrale vaut $\sqrt{2\pi}$, *cf. exercice 39).*

EXERCICE 43. *On pose* $I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos xt}{t^2} e^{-t}\, dt$.

Montrer que I *est* $\mathcal{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}$ *(si nécessaire prendre* $|x| \leqslant \alpha$ *pour commencer).*
Par dérivation sous le signe $\int$ *, montrer que* $I''(x) = \frac{1}{1+x^2}$*, en déduire* $I(x)$.
Montrer que $I(x) = x \int_0^{\infty} \frac{1-\cos u}{u^2} e^{-u/x}\, du$ *et justifier que* $\int_0^{\infty} \frac{1-\cos u}{u^2} e^{-u/x}\, du \to \int_0^{\infty} \frac{1-\cos u}{u^2}\, du$ *quand* $x \to +\infty$*, en déduire sa valeur (cf. exercice 36).*

EXERCICE 44. *Calculer la limite de* $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx$ *quand* $n \to +\infty$ *(on introduira la fonction égale à l'intégrande sur* $[0, \sqrt{n}]$ *et nulle pour* $x \geqslant \sqrt{n}$ *pour appliquer le TCD.*
Évaluer cette intégrale grâce au changement de variable $x = \sqrt{n} \cos t$ *; et à l'aide de la formule ou des intégrales de* WALLIS*, retrouver l'intégrale de* GAUSS*.*

EXERCICE 45. *Soit* f *une fonction* $\mathcal{C}^{\infty}$*. Montrer que* $g : x \mapsto \frac{f(x) - f(0)}{x}$ *est* $\mathcal{C}^{\infty}$ *aussi . Une expression intégrale habile (*$g(x) = \int_0^1 \dots dt$*) pourra permettre de gagner...*

EXERCICE 46. *Montrer que* $(x, y) \mapsto \frac{\sin x - \sin y}{x - y}$ *définie pour* $x \neq y$ *réels se prolonge en une fonction de* $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$*. On peut s'inspirer de l'exo précédent ou utiliser un sinus cardinal.*

EXERCICE 47. *Soit* $P \in \mathbb{C}[X]$ *de degré* $\geqslant 1$.

On suppose que P **n'a pas de racine dans** $\mathbb{C}$ *et on pose* $\varphi : r \mapsto \int_0^{2\pi} \frac{dt}{P(r\,e^{it})}$.
Montrer que φ *est bien définie sur* $\mathbb{R}_+$*, continue, et tend vers 0 en l'infini. Valeur de* $\varphi(0)$ *?*
One better, montrer que φ *est dérivable. Coup de grâce, montrer qu'elle est constante !*
En déduire une contradiction.
Quel théorème fondamental avez-vous démontré, au juste ?

EXERCICE 48. *Calculer* $\int_0^{\pi} \ln(x \cos^2 t + y \sin^2 t)\, dt$*, pour* $x > 0$ *et* $y > 0$*. Peut-on passer à la limite quand (par exemple)* $x \to 0, y = 1$ *?*

EXERCICE 49. *On considère une fonction continue, positive,* f*. Étudier* $\lim_{p \to +\infty} \left(\int_0^1 f^p\right)^{1/p}$*. On pourra commencer par des cas simples (notamment* f *en escalier).*
Plus délicat : étudier la limite de la même expression quand $p \to 0$*, pour une fonction* f *strictement positive. On pourra commencer par montrer que* $p \mapsto \int_0^1 f(t)^p\, dt$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$*.*

EXERCICE 50. *Calculer* $\int_0^{+\infty} e^{-ty} \sin t\, dt$*, puis* $g(y) = \int_0^{+\infty} e^{-ty} \frac{\sin t}{t}\, dt$*, le tout pour* $y > 0$*.*
Si on montrait que g *est définie et continue en 0, que pourrait-on en déduire ?*

EXERCICE 51. *Montrer que* $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+iy)^2}\, dx = C^{te} (= \sqrt{\pi})\ \forall y \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 52. *Montrer que la fonction (transformée de* FOURIER*)* $F : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2} + ixt}\, dt$ *est définie, continue, dérivable sur* $\mathbb{R}$*. À l'aide d'une équation différentielle, expliciter la valeur de* $F(x)$*.*

EXERCICE 53.

• *Calculer une transformée de* FOURIER *:* $f(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin\omega}{\omega} e^{-i\omega x} d\omega$ *(intégrale semi-convergente).*

On donne $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$ *et on discutera la valeur de* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(kt)}{t}\,dt$.

• *Calculer une transformée de* FOURIER *inverse* $g(\omega) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{+i\omega x} dx$*, avec* f *définie par* $\frac{1}{\alpha}$ *sur* $[-\alpha, \alpha]$ *et 0 ailleurs.*

Voyez-vous un rapport ? Que se passe-t-il si α *change ?*

EXERCICE 54. *Que pouvez-vous dire de* $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}\,dt$ *?*

EXERCICE 55. *Existence, valeur de* $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos(tx)\,dt$ *(pour* $0 < a < b$*).*

EXERCICE 56. *On pose* $I(x) = \int_0^{2\pi} \ln|1 - xe^{-it}|\,dt$.

Montrer que $I(x)$ *existe (pour quels* x *?), puis calculer* $I'(x)$ *et en déduire* $I(x)$.

EXERCICE 57. *Domaine de définition, continuité, dérivabilité, valeur de* $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln t}\,dt$

EXERCICE 58. ** On pose* $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cos(xt)\,dt$ *et* $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \sin(xt)\,dt$ *;*

trouver une équation différentielle simple vérifiée par $h = f + ig$.

En déduire f *et* g*, (*$f(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}\cos\left(\frac{1}{2}\arctan x\right)}{\sqrt[4]{x^2+1}}$*) et ** peut-être même (poser* $x\,t = u^2$ *et intuiter au moins le résultat) la valeur de l'intégrale* $\int_0^{\infty} \cos(u^2)\,du$.

EXERCICE 59. *Montrer indépendamment que cette intégrale* $\int_0^{\infty} \cos(u^2)\,du$ *est (semi !)convergente.*

Pour calculer cette intégrale :

1. *Montrer que* $\int_0^1 e^{-\alpha x^2} e^{ix^2}\,dx \to \int_0^1 e^{ix^2}\,dx$ *quand* $\alpha \to 0$.
2. *Montrer la relation*

$$\forall \alpha \geqslant 0 \quad \int_1^{\infty} e^{(i-\alpha)x^2}\,dx = -\frac{e^{i-\alpha}}{2(i-\alpha)} + \int_1^{\infty} \frac{e^{(i-\alpha)x^2}}{2(i-\alpha)x^2}\,dx$$

   en distinguant le cas $\alpha = 0$.
3. *En déduire que* $\int_1^{\infty} e^{(i-\alpha)x^2}\,dx \to \int_1^{\infty} e^{ix^2}\,dx$ *quand* $\alpha \to 0^+$ *et* $\int_0^{\infty} e^{(i-\alpha)x^2}\,dx \to \int_0^{\infty} e^{ix^2}\,dx$.

À l'aide de la formule trouvée pour $f(x)$ *à l'exo 58 et d'un équivalent en* $+\infty$*, donner la valeur de* $\int_0^{\infty} \cos(x^2)\,dx$*. Respirer. Applaudir.*

EXERCICE 60. *On cherche un équivalent de l'intégrale* $I_n = \int_0^{\pi/2} x^2 \cos^n x \, dx$.

1) Montrer que $I_n \to 0$.

2) Montrer que $\left(\cos(t/\sqrt{n})\right)^n \to e^{-t^2/2}$.

3) En intégrant la relation $\theta \leqslant \tan\theta$ *entre 0 et* $x \in [0, \pi/2[$ *montrer la majoration* $\cos x \leqslant e^{-x^2/2}$.

4) Montrer que $I_n = n^{-3/2} J_n$ *où* $J_n = \int_0^{\pi\sqrt{n}/2} t^2 \left(\cos(t/\sqrt{n})\right)^n dt$.

5) Justifier l'application du TCD à J_n *(on posera* $J_n = \int_0^\infty f_n$ *où* f_n *est nulle sur* $[\frac{\pi\sqrt{n}}{2}, +\infty[$*).*

6) Vérifier que $\int_0^\infty t^2 e^{-t^2/2} \, dt = \sqrt{\pi/2}$ *et conclure.*

EXERCICE 61. *Soit* f *intégrable sur* $\mathbb{R}_+$. *Montrer que* $t \mapsto e^{-xt} f(t)$ *est intégrable pour tout* $x \geqslant 0$.

On définit sur $L^1(\mathbb{R}_+)$ *la transformée de* LAPLACE *par* $\mathcal{L}(f) : x \mapsto \int_{\mathbb{R}_+} e^{-xt} f(t) \, dt$.

Montrer que $\mathcal{L}$ *est linéaire. Que pouvez-vous dire de l'espace d'arrivée ?*

Calculer l'image par $\mathcal{L}$ *des fonctions suivantes :* $\sin, \cos$ *(pour* $x > 0$*),*

$t \mapsto e^{-at}$ *pour Re*$(a) > 0$, $t \mapsto \chi_{[0,1]}$ *(1 si* $0 \leqslant t \leqslant 1$*, 0 sinon),* $t \mapsto f'(t)$ *avec* f *et* f' *intégrables.*

EXERCICE 62. *Calculer la transf. de* LAPLACE *de* $J : t \mapsto \sum_{n \geqslant 0} \dfrac{(-1)^n t^{2n}}{4^n (n!)^2}$. *NB :* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx} t^n \, dt = \frac{n!}{x^{n+1}}$.

EXERCICE 63. *Montrer que* $f : x \in [0, +\infty[\mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t.e^{-t}}{1+xt} dt$ *est* $\mathcal{C}^\infty$*, et calculer son DL en 0 d'ordre* n.

On pourra aussi chercher, et résoudre complètement, une EDO vérifiée par f.

EXERCICE 64. *Pour effrayer les petits enfants : montrer que*

* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2\sqrt{x}\cos t} \, dt$, ** *puis que ceci est équivalent à* $\dfrac{e^{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{\pi}.\sqrt[4]{x}}$ *quand* $x \to +\infty$.