Calcul différentiel

EXERCICE 1. *(différence entre physique et maths…)*

Si on on vous dit que $U(x,y) = K\varepsilon_0(x^2+y^2)$, *à votre avis que vaudra* $U(r,\varphi)$?

EXERCICE 2. *Dérivées partielles d'ordre 1, 2 des applications suivantes* (f, g *sont des applications de classe* $\mathcal{C}^2$) *:*

$$(\cos xy)^{\sin xy} \qquad \arctan\frac{x}{y} \qquad f(x-y) \qquad (x,y)\mapsto g(y,x) \qquad (x,y)\mapsto(x+y,xy) \qquad (r,\theta)\mapsto(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

EXERCICE 3. *Montrer que l'application* $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ *se prolonge par continuité en l'origine. Calculer* D_1f, D_2f *en tout point,* $D_uf(0,0)$ *quand* $u = (\cos\theta, \sin\theta)$ *(utiliser la définition).*

f *est-elle* $\mathcal{C}^1$ *?*

EXERCICE 4. *Différentiabilité et différentielle éventuelle des applications suivantes, avec ou sans calculs :*

$$x\mapsto\frac{x}{||x||^2} \qquad A\mapsto P^{-1}AP \qquad A\mapsto\det A \qquad A\mapsto A^n\ (n\in\mathbb{N}^*) \qquad A\mapsto A^{-1}$$

(A *matrice carrée) (pour le dernier, différentier* $A\times A^{-1}$ *– après avoir justifié la classe* $\mathcal{C}^1$*)*

EXERCICE 5. *On considère une série entière de rayon de convergence infinie (*$\sum a_nz^n$*) et on pose*

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+iy)^n$$

Montrer que f *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *(et même plus ?) et trouver une relation entre* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$*, puis calculer le Laplacien* Δf.

EXERCICE 6. $f\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$, *sa différentielle est partout une rotation :* $df_a = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c\end{pmatrix}$, $c^2+s^2=1$.

Montrer que f *elle-même est une rotation (mq les fonctions* c, s *sont en fait des constantes).*

EXERCICE 7. *On définit* l'entropie de Shannon *d'une variable aléatoire* $X:\Omega\to\{1,2,\dots,n\}$ *par*

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i \quad (p_i = \mathcal{P}(X=i)\,).$$

Calculer $H(X)$ *quand* X *est uniforme.*

On considère l'ensemble de ces variables aléatoires. Montrer que leurs lois parcourent l'ensemble $\mathcal{S}_n$ *des* n*-uplets* $(p_1,\dots,p_n)\in\mathbb{R}^n$ *qui sont* stochastiques, *i.e.*

$$\forall i = 1\dots n \quad p_i \geqslant 0 \quad \textit{et} \quad p_1+\dots+p_n = 1.$$

Montrer que cet ensemble est compact dans $\mathbb{R}^n$ *et que* H *y est continue (prolonger par continuité quand l'un des* p_i *tend vers 0). En déduire que* H *atteint un maximum sur* $\mathcal{S}_n$.

En paramétrant les éléments de S_n *par* $(p_1,\dots,p_{n-1})$*, et en calculant* $\dfrac{\partial p_n}{\partial p_i}$*, montrer que le maximum est atteint pour une loi uniforme.*

EXERCICE 8. *Pourquoi* $f : (x, y) \mapsto x^2y + \ln(1 + y^2)$ *admet-elle un max et un min sur* $A = [-1, 1] \times [-1, 1]$ *?*
Montrer que f *admet un point critique sur* $B =]-1, 1[^2$ *(l'intérieur de* A*).*
L'origine est-elle est un extremum pour f *? Indic : calculer* $f(x, x^3)$*.*
Trouver enfin max et min de f *sur* A*.*

EXERCICE 9. *Maximum de* $\dfrac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}$ *sur* $k = [0, 1]^2$ *? Établir d'abord qu'il y a un maximum atteint sur* K*, chercher séparément le maximum sur le bord du K-arré puis montrer que s'il est atteint sur* $\mathring{K}$ *alors il vaut* $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$*.*
Quel est le maximum finalement sur K *? (CCP 2007)*

EXERCICE 10. *Maximum du produit des distances du point* M *aux trois côtés du triangle qui le contient ? (on se ramènera à un repère orthonormé* $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$*). Idem avec la somme des distances.*

EXERCICE 11. *Trouver les triangles d'aire maximale (resp. de périmètre maximal) inscrits dans un cercle. Même question avec les quadrilatères inscrits (non croisés).*

EXERCICE 12. *Distance entre les deux droites* $(x = y = z)$ *et* $(x + y + z = -4, 3x - 2y + z = 5)$ *dans* $\mathbb{R}^3$ *euclidien (paramétrer les deux droites, chercher le minimum de l'écart).*

EXERCICE 13. *Matrice jacobienne de l'application* $f : (x, y) \mapsto \binom{x+y}{xy}$*. L'application est-elle inversible ? Donner un ouvert convexe maximal où* f *est injective, et déterminer son image.*

EXERCICE 14. *En admettant ou en redémontrant la formule de* HERON, $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ *qui donne la surface d'un triangle en fonction des côtés* a, b, c *et du demi-périmètre* $2p = a + b + c$*, trouver comment rendre* S *maximale (à* p *constant) par choix de* a, b, c*.*

EXERCICE 15. ** On considère un fermé non vide* A *de* $\mathbb{R}^2$*, et l'application* $f : x \mapsto d(x, A)$ *définie et* > 0 *pour* $x \notin A$*.*
Montrer que pour tout x $\exists y \in A$ $f(x) = \|x - y\|$*.*
On suppose f *différentiable en* x*. Sans démonstration, saurez-vous deviner la valeur de* $\nabla f(x)$ *? (la démonstration est franchement tordue).*

EXERCICE 16. *On s'intéresse aux couples de fonctions* u, v *de classe au moins* $\mathcal{C}^2$ *de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$ *telles que*

$$D_1u = D_2v \quad \textit{et} \quad D_2u = -D_1v$$

Vérifier que nécessairement $\Delta u = \Delta v = 0$ *(Laplacien).*
Trouver toutes les v *possibles si* $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + 3x$*. Si on pose*

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) - iv(x, y),$$

préciser laquelle des solutions vérifie $f(0) = 0$ *et exprimer alors* $f(z)$ *en fonction de z.*

EXERCICE 17. *Résoudre les EDP suivantes sur le plus grand domaine possible :*

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - y\frac{\partial f}{\partial y} + x\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \textit{(passer en } \ln xy, \ln(x/y)\textit{)}$$

$$3\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \textit{(changement de variable linéaire)} \qquad f(x,y)\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right) + x^2 + y^2 = 0 \quad \textit{(polaires)}$$

$$x^2 D_{1,1}f + x\,D_1 f = y^2 D_{2,2} f + y\,D_2 f \quad \textit{(poser par exemple } x = e^u, y = e^v\textit{)}.$$

EXERCICE 18. *Recherche de solutions « stationnaires » de l'équation de la chaleur. Trouver toutes les solutions de la forme* $f(x,t) = g(x)h(t), x \in [0,\pi], t > 0$ *de l'équation*

$$(\mathcal{C}) \quad \partial_{x,x} f = \partial_t f \qquad f(0,t) = f(\pi,t) = 0\ \forall t \in \mathbb{R}_+$$

Comment peut-on faire pour construire une solution du problème $(\mathcal{C})$ *avec la condition initiale* $f(x,0) = \psi(x)$, ψ *étant un profil donné [tel que* $\psi(0) = \psi(\pi) = 0$ *quand même] ?*

EXERCICE 19. *Trouver toutes les solutions sur* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *de l'équation* $\Delta f = D_{1,1} f + D_{2,2} f = 0$ *de la forme* $f(x,y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = g(r)h(\theta)$. *On obtiendra une équation découplable, de la forme*

$$r^2 g''(r)h(\theta) + rg'(r)h(\theta) + g(r)h''(\theta) = 0$$

et on justifiera que $\dfrac{r^2 g'' + rg'}{g}$ *et* $\dfrac{-h''}{h}$ *sont des fonctions constantes et égales à une même valeur* k.
Montrer que h *a des solutions qui « font le tour » (i.e.* h *est* 2π*-périodique) ssi* k *est le carré d'un entier. Dans la suite on fera cette hypothèse.*
Pour l'équation portant sur g, *on cherchera des solutions de la forme* r^α.

EXERCICE 20. FENÊTRE DE VIVIANI.
On considère le cylindre $x^2 + y^2 = a\,x$ *et la sphère unité* $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.
Trouver une paramétrisation de leur intersection et la représenter (pt double ?). Que dire des vecteurs tangents au point $(a,0,0)$ *?*

EXERCICE 21. *Vecteurs tangents à un triangle ? À une sphère (dans* $\mathbb{R}^3$ *euclidien) ?*

EXERCICE 22. *(CCP) On considère la sphère* $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 3$. *Trouver son intersection avec la droite* $(x = y = z)$ *et donner les plans tangents en ces points.*

EXERCICE 23. *Donner un vecteur normal à la surface* $(S) : x^2 + y^2 - z^2 = 1$ *au point* (x_0, y_0, z_0). *En déduire une équation du plan tangent.*
Donner l'ensemble des points de (S) *où ce plan tangent est parallèle à la droite* $(x = y, z = 0)$.

EXERCICE 24. *Écrire l'intersection de la surface* $z = xy$ *et de son plan tangent au point* $(x_0, y_0, z_0 = x_0 y_0)$. *Vous démontrez ainsi que le paraboloïde hyperbolique est doublement réglé (en tout point passent deux droites tracées sur la surface).*

EXERCICE 25. RUBAN DE MÖBIUS.
On considère le segment $[R - \ell, R + \ell]$ *sur l'axe* (Ox). *On le paramètre par* $u \mapsto R + u.\ell,\ u \in [-1,1]$.
Le paramètre v *va servir à le faire tourner autour de son centre ET à faire un tour autour de l'origine :*

$$r = R + (u \sin\frac{v}{2})\ell, \qquad \begin{cases} x &= r\cos v \\ y &= r \sin v \\ z &= (u\cos\frac{v}{2})\ell \end{cases} \qquad u \in [-1,1], v \in [0,4\pi]$$

Décrire cette surface, justifier qu'elle est connexe par arcs ; que se passe-t-il quand on change (u,v) *en* $(-u, v + 2\pi)$ *?*
En tout point (de paramètre (u_0, v_0)*) on peut trouver deux vecteurs tangents, l'un à la ligne* $h \mapsto (x,y,z)(u_0 + h, v_0)$ *et l'autre à la ligne* $h \mapsto (x,y,z)(u_0, v_0 + h)$. *Ce sont les vecteurs* $\dfrac{\partial}{\partial u}(x,y,z)$ *et* $\dfrac{\partial}{\partial v}(x,y,z)$. *En déduire « le » vecteur normal au point* $(0, v_0)$. *Qu'arrive-t-il à ce vecteur normal si on passe continûment de* $(0, v_0)$ *à* $(0, v_0 + 2\pi)$ *? Visualisons le vecteur normal par un pinceau enduit de peinture, pouvez-vous peindre le ruban en rouge d'un côté et en bleu de l'autre ?*
On découpe le ruban en suivant la ligne médiane $r = R$, *i.e.* $u = 0$. *Montrer que l'on obtient* ***deux*** *morceaux (deux parties disjointes connexes par arcs).*
** Si l'on découpe selon l'arc* $u = 1/2, v \in [0, 4\pi]$, *combien y a-t-il de morceaux ? (d'après X PC 93)*