

EXERCICES DE PROBABILITÉS MP

EXERCICE 1. Rappels de sup : retrouver espérance et variance d'une loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, n\}$. Idem avec une loi de Bernoulli (pile ou face, i.e. 0 ou 1) de probabilité p , avec la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ i.e. $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.
On fera cet exercice une fois acquise la notion de fonction génératrice.

EXERCICE 2. Rappels de sup : on dispose 8 tours sur un échiquier. Probabilité pour qu'aucune tour ne puisse en capturer une autre ? (bien préciser l'espace probabilisé que vous considérez)

EXERCICE 3. Rappels de sup : on se pose la question, étant données n personnes dans une pièce, de savoir combien d'entre elles ont la même date d'anniversaire. On considère que chaque année a 365 jours distincts (on ignore les années bissextiles etc). Décrire un espace probabilisable adéquat. Montrer que la probabilité pour que les n personnes aient des dates d'anniversaire différentes est $\frac{365!}{365^n (365-n)!}$.

En déduire que si 23 personnes sont réunies alors il y a plus d'une chance sur 2 pour que deux d'entre elles partagent la même date d'anniversaire. Quelle est la probabilité pour que deux étudiants de MP aient la même date d'anniversaire ?

EXERCICE 4. Rappels de sup : Deux enfants d'un même couple ont environ 1 chance sur 2×10^{10} d'avoir des gènes tous différents. Si on estime qu'il y a eu (indépendamment) 10^{10} fois une telle expérience, quelle est la probabilité pour qu'il n'y ait JAMAIS eu deux frères/sœurs ayant des gènes tous différents ?

EXERCICE 5. Est-il possible d'avoir une tribu sur \mathbb{Z} , telle que la probabilité de tout entier soit nulle ? ($\forall n \in \mathbb{Z} P(\{n\}) = 0$)

EXERCICE 6. Proposer une probabilité sur l'ensemble $\mathbb{Q} \cap]0, 1[$ des rationnels compris entre 0 et 1.

EXERCICE 7. (* Cet exercice n'est pas pour les noobs !)

Tous les soirs, au lieu de réviser ses cours de prépa, Kevin va rusher Stratholme dans l'espoir de looter la monture du Baron Vailliefendre.

1) Étant donné que WoW est un programme informatique (considéré comme une constante, on négligera les MÀJ), par quelle loi modéliseriez-vous cette expérience ? (rappel de Sup)

2) D'après le site worldofwarcraft.judgehype.com, la probabilité de dropper la monture est de 0,3%. Au bout de combien de jours Kevin peut-il espérer frimer sur le destrier de la mort ? Au fait, d'où peut provenir ce chiffre de 0,3% ?

Quelle est la probabilité d'arriver à la dropper en moins de 210 jours (entre le début et la fin des cours) ? (utiliser la calculatrice)

3) question subsidiaire : que pensez-vous des chances de réussite aux concours de Kevin ?

EXERCICE 8. En sortant de l'école, le petit Renaud achète toujours un Mistral à l'épicier du coin de la rue. La probabilité que ce soit un « Mistral gagnant » est de p . Soit X la variable aléatoire égale au nombre de Mistrals qu'il achète jusqu'à en avoir un gagnant. Reconnaître la loi de X . Si $p = 1/200$, quelle est l'espérance de X ?

EXERCICE 9. Duel à l'ancienne (Barry Lindon)

A tire sur B avec une probabilité p de le descendre. S'il rate, c'est au tour de B de l'ajuster avec une probabilité q . Si B rate, A tire à nouveau, puis B, etc. . . jusqu'à ce qu'un seul reste debout.

Quelle est la probabilité que A gagne ?

EXERCICE 10. Alain (le Bon), Bob (la Brute) et Carlos (le Truand) s'affrontent en duel. La règle est la suivante : A tire en premier, puis B, puis C, puis (s'il est encore debout) A à nouveau, puis B, etc. . . jusqu'à ce qu'un seul reste debout. Détail charmant, A a 30% de chances de toucher sa cible, B a 50% et C 100%. Détail vital, ces probabilités sont connues de chacun des tireurs.

a) Pourquoi A n'a-t-il pas intérêt à tirer sur B ?

b) Sur qui B doit-il tirer en priorité ?

c) Montrer que la meilleure chance de A est. . . de tirer le premier coup en l'air.

Subsidiaire : si tout le monde fait au mieux de ses intérêts, quel cow-boy a le plus de chance de remonter à cheval ?

EXERCICE 11. Les chasseurs du Bouchonnois tuent en moyenne 5 vaches par an. Le nombre de ces vaches prises pour des lapins suivant une loi de Poisson, calculer la probabilité pour que le nombre de vaches tuées par Gérard Frugier, Nemrod du Bouchonnois, ne dépasse pas 7. Calculer aussi la probabilité pour qu'il ne sacrifie aucun bovin dans l'année.

EXERCICE 12. Quand B.H.L. donne une conférence en Belgique, il est victime de l'entarteur, une fois – sur dix. Combien de fois doit-il se rendre au plat pays qui n'est pas le sien pour avoir plus de 90% de chances de se prendre 5 tartes dans la figure ?

(faire un programme à la calculatrice pour évaluer la somme $\sum_{k=0}^4 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ et terminer avec une boucle sur n .)

EXERCICE 13. † **Le problème du collectionneur de vignettes** (coupon collector).

Ron Weasley collectionne les vignettes de magiciens célèbres. Il y a n vignettes différentes, on considère que chacune a une probabilité $1/n$ de se trouver dans l'emballage d'une grenouille au chocolat (lesquelles sont en stock inépuisable – c'est magique!). Après quelques années, Ron possède k vignettes distinctes. S'il trouve une vignette qu'il possède déjà, il la rejettera. On note X_k la v.a. égale au nombre de chocolate frogs qu'il achète avant de trouver une nouvelle vignette, la $k+1$ ème.

a) Justifier que la loi de X_k est une loi géométrique de raison $\frac{n-k}{n}$. Quelle est la probabilité q_n de compléter la collection avec seulement n grenouilles ? (on n'utilisera pas de Felix Felicis, qui est interdite pour les jeux de hasard).

Montrer que q_n décroît exponentiellement, i.e. plus précisément que $q_{n+1}/q_n \rightarrow e^{-1}$.

b) Même si, psychologiquement, cela ne semble pas être le cas, les variables X_k sont indépendantes. En déduire l'espérance $E(T)$ de la v.a. $T = X_1 + \dots + X_{n-1}$, c'est à dire le nombre total moyen de grenouilles à acheter pour compléter la collection. On posera

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

c) Montrer que $E(T) \sim n \ln n$. Que peut-on en déduire quant à la probabilité pour Ron de faire une crise de foie ? (Remarque : visage jaune et cheveux rouges, il deviendrait alors facilement mascotte de l'USAP)

d) Exprimer et donner une majoration de $V(T)$.

EXERCICE 14. (d'après CCP MP 2018)

La loi de Poisson est définie comme limite de $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$ quand $n \rightarrow +\infty$. Essayons. . . Un jury interroge n candidats, tous nés indépendamment et équiprobablement un jour de 2001. X_n désigne le nombre de candidats qui sont convoqués le jour de leur anniversaire. Quelle est la loi de X_n ?

Sans calculatrice, mais avec la valeur approchée $e^{-0,6} \approx 0,55$, estimer la probabilité que deux étudiants parmi les 219 candidats soient convoqués le jour de leur anniversaire (les pauvres), en approximant la loi binomiale par une loi de Poisson .

Avec calculatrice, donner une valeur plus précise (par la loi binômiale). L'approximation était-elle justifiée ? [Je trouve 2‰ d'écart]

EXERCICE 15. On suppose, naïvement peut-être, que la probabilité biologique qu'un nouveau-né soit un garçon est égale à $1/2$. Dans un village reculé de Cerdagne, tous les couples font leur devoir conjugal jusqu'à obtenir un garçon. Soit X la v.a. du nombre d'enfants engendrés par un couple, et p_g la proportion de garçons. Calculer p_g en fonction de X , reconnaître la loi de X et en déduire $E(p_g)$. Commentaire ?

EXERCICE 16. Au royaume de Taupe O' Lotchi, la consanguinité de la famille royale fait augmenter drastiquement le risque de stérilité. On considère qu'à partir du règne de Clotaire Legnidu, indexé à 0, le nombre de générations avant l'extinction de la lignée suit une v.a. X vérifiant la relation

$$\forall n \geq 1 \quad 3P(X = n + 1) = 4P(X = n) - P(X = n - 1)$$

(heuristiquement, si la lignée s'est éteinte au rang $n - 1$ ça diminue les chances qu'on ait à faire le calcul au rang $n + 1$. . .)

Compte tenu de ce que P est une probabilité, calculer $p_n = P(X = n)$. En déduire que la loi de $Y = X + 1$ (i.e. $P(Y = n + 1) = P(X = n)$) est géométrique et calculer son espérance.

EXERCICE 17. La poêle contient N nuggets de poulet. À chaque fois que le cuisinier donne un coup de poignet, chaque nugget a la probabilité $p \in]0, 1[$ d'être retourné. On considère que les retournements des nuggets sont indépendants. Le cuisinier fait sauter la poêle k fois. Quelle est la probabilité qu'un nugget donné ait été retourné au moins une fois ? Jamais ? Quelle est la probabilité que tous les nuggets soient saisis des deux côtés ? Donner la valeur de k pour que cette probabilité soit supérieure à $9/10$.

EXERCICE 18. Le nombre de petits engendrés par un couple de vautours fauves durant leur vie suit une loi de Poisson. On observe sur 200 couples vivant dans les Pyrénées qu'il y en a 26 n'ayant pas de progéniture. Estimez le paramètre de la loi, et en déduire la probabilité pour qu'un couple ait 3 enfants durant son existence.

EXERCICE 19. Josep arpente les rives du lac des Bouillouses avec sa canne à mouche. En moyenne il prend 5 truites en une journée. Je vous laisse deviner quelle loi suit $X =$ (le nombre de poissons pris). Son permis lui donne droit à 10 prises maximum. Quelle est la probabilité d'atteindre cette limite ?

Question subsidiaire. Josep pêche 50 jours par an. Quelle est la probabilité pour qu'il atteigne au moins une fois la limite des dix truites ?

EXERCICE 20. Rafael a la probabilité $p \in]0,5, 1[$ de gagner le point quand il sert. On considère que tous ses services sont des v.a. indépendantes. Quelle est la probabilité d'arriver à égalité après 6 services ? Quelle est la probabilité qu'il remporte le jeu ?

EXERCICE 21. Une usine des Fenouillèdes produit des vigatanes sur deux chaînes de montage indépendantes, A et B. A produit 60% des objets et B le reste.

Les vigatanes produites sur A ont 1 chance sur 10 d'être défectueuses, celles produites sur B en ont le double.

a) (révision de Sup) On achète une paire de vigatanes qui sort de l'usine. Pas de chance, la semelle se décolle. Probabilité qu'elles sortent de la chaîne A ?

b) Le nombre de paires de vigatanes produites en une heure sur A suit une loi de Poisson Y de paramètre 20. Soit X le nombre de celles qui sont défectueuses. Exprimer la probabilité conditionnelle $P(X = k | Y = n)$ (c'est une loi très connue...). En déduire, à l'aide du système complet (exhaustif) ($Y = i$) $_{i \in \mathbb{N}}$, que X suit une loi de Poisson dont on donnera le paramètre.

EXERCICE 22. (D'après CCP 2016 MP I)

a) Préliminaire : calculer $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{2^{n-1}}$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{2^{n-1}}$. En déduire que la famille $\left(\frac{i+j}{2^{i+j}}\right)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer sa somme.

b) On considère deux v.a. X, Y sur un même espace probabilisé à valeurs dans \mathbb{N} . Vérifier que l'on définit bien une loi conjointe pour le couple (X, Y) par

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2 \quad P((X, Y) = (i, j)) = \frac{i+j}{2^{i+j+3}}$$

c) Montrer que X et Y ont même loi.

d) X et Y sont-elles indépendantes ?

EXERCICE 23. On définit un espace probabilisé sur $\Omega = \mathbb{N}^*$ par $P(n) = \frac{1}{\zeta(s)n^s}$.

1) Montrer que c'est bien une probabilité (on rappelle que $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} \dots$)

2) Soit A_n l'évènement « être un multiple de n ». Montrer que les évènements A_p , pour tous les p premiers, sont indépendants dans leur ensemble.

3) Exprimer l'évènement E « n'être multiple d'aucun nombre premier » en fonction des \bar{A}_p . À l'aide de leur indépendance et avec le théorème de continuité décroissante appliqué aux $E_n = \bigcap_{k=1}^n \bar{A}_{p_k}$ (où $p_1 < p_2 < \dots < p_k < \dots$ est une numérotation des nombres premiers), en déduire que

$$P(\{1\}) = \prod_{p \text{ premier}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \quad \text{puis la magnifique formule} \quad \zeta(s) = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}.$$

EXERCICE 24. S est une v.a. à valeurs dans \mathbb{N} , $\ell \in \mathbb{R}_+$. Montrer que

$$P(S \leq \ell) \leq E(\exp(\ell - S))$$

Indication : au lieu de \exp on peut prendre toute fonction f telle que $f(x) \geq 1$ pour $x \geq 0$ (ENS 2016, I3a).

EXERCICE 25. La v.a. X suit une loi de Poisson de paramètre m . Majorer $P(X > 2m)$ par l'inégalité de Bienaymé-Čebychev, puis par une estimation numérique de la valeur exacte (pour $m = 1, 2, 10, 20$).

EXERCICE 26. La v.a. X suit une loi géométrique de paramètre $1/10$. On sait que l'espérance de la première réussite (modélisée par la X) est 10. Quelle est la probabilité que $X \in \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ c'est à dire que l'on réussisse au plus tard avant le nombre moyen d'essais (inclus)? Et avec 100? 1000? Limite quand $p \rightarrow 0$ de $P(X \leq 1/p)$?

* Trouver un équivalent du seuil m tel que $P(X \leq m)$ soit égal à (ou le plus proche possible de) $1/2$ (médiane).

EXERCICE 27. † La v.a. X prend ses valeurs dans \mathbb{N} . On pose $p_k = P(X = k)$. Montrer que la famille $(u_{\ell,k})_{k,\ell \geq 1}$ définie par $u_{\ell,k} = p_k$ si $1 \leq \ell \leq k$ et 0 sinon est sommable $\iff X$ admet une espérance $\iff \sum P(X \geq k)$ converge et en déduire une expression de l'espérance.

EXERCICE 28. On considère une v.a. réelle **bornée**. Montrer qu'elle admet des moments de tous ordres.

EXERCICE 29. (ECP)

a) Montrer pour $x \in [-1, 1]$ et $t \in \mathbb{R}$ l'inégalité $e^{tx} \leq \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^t$.

Montrer aussi que $\text{ch } t \leq e^{t^2/2}$.

b) $t \in \mathbb{R}$ est fixé. Soit X une v.a. discrète, centrée, avec $|X| \leq 1$ presque sûrement. Justifier que la v.a. e^{tX} admet une espérance et que $E(e^{tX}) \leq e^{t^2/2}$.

c) Soient $X_1 \dots X_n$ des v.a. discrètes indépendantes à valeurs réelles et $a_1 \dots a_n$ des réels > 0 tels que $\forall i = 1 \dots n \quad |X_i| \leq a_i$ (p.s.).

On pose $S_n = \sum X_i$. Montrer que $E(e^{tS_n}) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2} \sum a_i^2\right)$.

EXERCICE 30. (Mines-Ponts 2015, Maths A)

On va démontrer le théorème d'approximation polynomiale de Weierstrass (le même problème, avec la même méthode, a été donné à CCP mais cette version est mieux faite).

Soient n un entier strictement positif, $x \in [0, 1]$ et $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On note X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires mutuellement indépendantes et distribuées selon la loi de Bernoulli de paramètre x .

On note également $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, $Z_n = S_n/n$ et $B_n(f)(x) = E\left(f(Z_n)\right)$.

(1) Rappeler, sans démonstration, la loi de S_n (!). En déduire, avec démonstration, les valeurs de l'espérance et de la variance de S_n en fonction de n et de x .

(2) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que pour tout $\alpha > 0$:

$$\sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ |x - \frac{k}{n}| \geq \alpha}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = P(|S_n - nx| \geq n\alpha) \leq \frac{1}{4n\alpha^2}$$

(3) Montrer que :

$$B_n(f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right)$$

et * en déduire que la suite $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$. On pourra utiliser le résultat de la question précédente [découper et majorer...] ainsi que le théorème de Heine [rappel : pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tous $x, y \in [0, 1]$ vérifiant $|x - y| \leq \alpha$ on ait $f(x) - f(y) \leq \varepsilon$. Ça peut aider à deviner comment découper la somme, non?..].

EXERCICE 31. † Le nombre de truites (resp. de perches) pêchées par Donald Knuth suit une loi de Poisson X de paramètre λ (resp. Y de paramètre μ). Il n'y a pas d'autres poissons (avec un p minuscule), et la besace du pêcheur contient donc $X+Y$ victimes en fin de journée.

a) Retrouver la loi de $X+Y$ en supposant X et Y indépendantes par les fonctions génératrices (ou par un calcul direct).

b) Calculer $P(X=k | X+Y=n)$ (utiliser $P(X+Y=n | X=k)$).

EXERCICE 32. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

Soit $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.

On considère N variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_N définies sur un même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p .

(1) Soit $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Déterminer $P(X_i \leq n)$, puis $P(X_i > n)$.

(2) On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \underset{1 \leq i \leq N}{\text{Min}}(X_i)$.

c'est à dire $\forall \omega \in \Omega, Y(\omega) = \text{Min}(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$, Min désignant « le plus petit élément de ».

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P(Y > n)$.

En déduire $P(Y \leq n)$, puis $P(Y = n)$.

(b) Reconnaître la loi de Y . En déduire $E(Y)$.

EXERCICE 33. † Calculer la fonction génératrice de la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$:

$P(X=k) = 1/n$. Retrouver à l'aide de cette fonction espérance et variance de cette loi. Même exercice avec la loi binomiale.

EXERCICE 34. *† Montrer que dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $1 + X + X^2 + \dots + X^{10} = \frac{X^{11} - 1}{X - 1}$ ne peut

s'écrire comme produit de deux polynômes de degrés 5 (commencer par le factoriser dans $\mathbb{C}[X]$).

On considère deux dés pipés (lois pas forcément uniformes, éventuellement distinctes pour les deux dés), on note X, Y les v.a. exprimant le jet de l'un et l'autre dé. Montrer, en considérant leurs fonctions génératrices, qu'il est impossible que $X+Y$ ait une loi uniforme.

EXERCICE 35. La fonction génératrice d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ est $g_{n,p} : t \mapsto (1-p+pt)^n$.

On fait tendre n vers l'infini et on suppose que p varie avec n de telle sorte que $np \rightarrow \lambda$,

i.e. $p \sim \frac{\lambda}{n}$. Quelle est la limite simple de la suite de fonctions $g_{n,p}$? La convergence est-elle uniforme sur $[0, 1]$? De quelle loi reconnaissez-vous la fonction génératrice?

EXERCICE 36. On considère une v.a. réelle qui prend trois valeurs distinctes seulement.

Montrer qu'elle est déterminée par son espérance et sa variance. Généralisation à n valeurs distinctes?

EXERCICE 37. ** (ENS) On considère une v.a. X à valeurs dans \mathbb{N} et deux v.a. Y, Z de même

loi, indépendantes. Montrer que $Y+Z \sim 2X$ si et seulement si X est (p.s.) constante (utiliser les fonctions génératrices).

EXERCICE 38. Soit (E_n) une suite d'évènements. On définit la limite supérieure de cette suite par

$$\tilde{E} = \limsup_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} E_k.$$

a) (pour comprendre) Montrer que $\omega \in \tilde{E} \iff \{k \mid \omega \in E_k\}$ est infini (i.e. \tilde{E} est l'ensemble des cas où une infinité d'évènements E_k se réalisent).

b) On suppose dorénavant que $\sum P(E_k)$ converge. Justifier que l'on peut supposer la suite $(P(E_k))_k$ décroissante.

c) Montrer que $\inf_{N \geq 1} \sum_{k \geq N} P(E_k) = 0$, en déduire par majoration que $P(\tilde{E}) = 0$.

C'est le (premier) *Lemme de Borel-Cantelli* : il est presque sûr que dans la suite d'évènements, seul un nombre fini vont se réaliser.

EXERCICE 39. Le deuxième Lemme de Borel-Cantelli est une réciproque partielle, qui prouve que une équipe de chimpanzés tape au hasard sur des claviers d'ordinateurs pendant un temps infini, il est quasi certain (« presque sûr ») qu'ils vont retrouver l'œuvre complète de Shakespeare (et le présent cours de probabilités).

Énoncé : on considère une suite d'évènements **indépendants** E_n telle que $\sum P(E_n) = +\infty$. Alors

$$P(\tilde{E}) = P(\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n) = P\left(\bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} E_k\right) = 1$$

(il est presque sûr qu'une infinité d'évènements se réalisent).

a) Montrer que $1 - P(\tilde{E}) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{k \geq n} \bar{E}_k\right)$ où \bar{E}_k est le complémentaire de E_k .

b) Justifier que $1 - P(E_n) \leq \exp(-P(E_n))$, et conclure grâce à l'hypothèse d'indépendance.

c) Les hypothèses sont-elles vérifiées si E_n est : "le jour n , un chimpanzé a tapé le cours de Probabilités de la MP Arago » ? En déduire le théorème des chimpanzés.

* Évaluer l'espérance du jour où un chimpanzé tape effectivement le cours. . .

En composant avec le premier lemme, on a que $P(\limsup E_n)$ vaut soit 0, soit 1 pour des évènements indépendants – selon que la série $\sum P(E_n)$ converge ou pas.



FIGURE 1. Il PEUT le faire!