EXERCICES DE PROBABILITÉS: SOLUTIONS

Exercice 1.
Pour une loi uniforme sur $\{1, 2 \ldots n\}$ on a $P(X = k) = 1/n$ d'où $E(X) = \sum_{k=1}^{n} k.\frac{1}{n} = \frac{n+1}{2}$ et

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2.\frac{1}{n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

d'où

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - (\frac{n+1}{2})^2 = \frac{n+1}{2}(\frac{2n+1}{3} - \frac{n+1}{2}) = \frac{n^2-1}{12}$$

Pour une loi de Bernoulli de probabilité p on a (si X prend les valeurs 0 ou 1)

$$E(X) = p = E(X^2) \qquad V(X) = pq = p(1-p)$$

Et pour la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ pour laquelle $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ il vient

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= n \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-\ell)!\ell!} p^{\ell+1}(1-p)^{n-1-\ell} = np(p + (n-p))^{n-1} = np \end{aligned}$$

Similairement

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{(n-k)!(k-2)!} p^k(1-p)^{n-k} + np \\ &= n(n-1)\sum_{\ell=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{(n-2-\ell)!\ell!} p^{\ell+2}(1-p)^{n-2-\ell} + np = n(n-1)p^2 + np = np(np+1-p) \end{aligned}$$

d'où la variance $V(X) = np - np^2 = np(1-p)$ (facile à retenir car symétrique en p et $1-p$).

Exercice 2.
On dispose 8 tours sur un échiquier. Je considère les 64 positions sur l'échiquier et les $\binom{64}{8}$ choix possibles. Cherchons le nombre de configurations telles qu'aucune tour ne puisse en capturer une autre : il y a une et une seule tour par colonne. Il y a 8 choix de ligne pour la première tour, plus que 7 pour la seconde, etc... la probabilité d'une telle configuration (si toutes les tours sont posées de façon équiprobable) est donc de $\frac{8!}{\binom{64}{8}} = \frac{560}{61474519} \approx 0.9110^{-5}$.

Exercice 3.
On considère les $n-$uplets à valeur dans 1,2,3,... 365. Il y en a 365^n, tous équiprobables. La probabilité pour que les n personnes aient des dates d'anniversaire différentes est $\frac{365!}{365^n\ (365-n)!}$ car on dénombre les $n-$uplets "injectifs" avec 365 choix pour la première valeur, mais plus que 364 pour la seconde, etc... jusqu'à $365 - n + 1 = 366 - n$.

À l'aide de la calculatrice on trouve les valeurs $0.55, 0.52, 0.49, 0.46$ pour $n = 21, 22, 23, 24$. Il faut donc (en retranchant cette probabilité de 1) au moins 23 personnes pour que la probabilité pour que deux personnes parmi n partagent la même date d'anniversaire soit supérieure à 1/2.
La probabilité pour que deux étudiants de MP aient la même date d'anniversaire est une certitude (0 ou 1), il suffit de regarder quelles SONT effectivement vos dates de naissance.

Exercice 4.
Pour chaque expérience la probabilité que les gênes soient différents est $1 - \frac{1}{2.10^{10}}$. Si les expériences sont indépendantes (et pourquoi seraient-elles corrélées ?) en 10^{10} expériences (l'ordre de grandeur du nombre total d'humains jamais nés) on a une proba de

$$\left(1 - \frac{1}{2.10^{10}}\right)^{10^{10}} \approx e^{-1/2} \approx 0.60$$

Reste 40% de chances d'avoir au moins un gêne commun.

Exercice 5.
Il est impossible d'avoir une tribu sur $\mathbb{Z}$, telle que la probabilité de tout entier soit nulle . En effet on aurait $P(\mathbb{Z}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} P(\{n\}) = \sum 0 = 0$.

Exercice 6.
Une probabilité sur l'ensemble $\mathbb{Q} \bigcap]0, 1[$ des rationnels compris entre 0 et 1 peut être définie de bien des façons, par exemple ainsi : tout élément de cet ensemble s'écrit de manière unique p/q avec $p \wedge q = 1$. À q donné il existe $\varphi(q)$ valeurs possibles de p (les générateurs de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ si vous vous souvenez du cours d'Algèbre...). Mettons que tous ces p/q aient une probabilité indépendante de p, c'est alors $\frac{1}{\varphi(q)} \times$ (probabilité que le dénominateur soit égal à q). Reste à choisir la probabilité d'un dénominateur égal à q, $P(D = q)$ de telle sorte que $\sum_{q\geqslant 2} P(D = q) = 1$. On peut prendre (par exemple) $P(D = q) = \frac{1}{q(q-1)}$ ou tout autre série de somme égale à 1, ici on aurait donc

$$P(\{p/q\}) = \frac{1}{\varphi(q)q(q-1)}$$

La fonction de répartition de cette distribution est tracée ci-dessous.

Exercice 7.
La loi du « Mistral gagnant » est géométrique. Si $p = 1/200$, l'espérance de X est de 200. Renaud va se niquer les dents.

Exercice 8.
WoW étant un programme informatique, Kevin utilise probablement un générateur de nombres pseudo-aléatoires pour tirer au sort si l'on loote ou pas la monture. La probabilité p de réussite est donc une donnée du programme. De ce fait on a affaire à une loi de Bernoulli pour chaque tentative, et une loi géométrique de paramètre p pour le nombre d'essais nécessaires avant de dropper. On peut estimer cette probabilité par la loi des grands nombres (comparer objectivement le nombre d'essais nécessaires pour un grand nombre de joueurs). C'est sûrement ainsi que sont évaluées les valeurs données par JudgeHype.
Admettons que $p \approx 0,7\%$. Soit X la v.a. "nombre d'essais avant de réussir", on a $P(X = n) = p(1-p)^{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et on sait (ou on retrouve) que l'espérance de X (qui a une loi

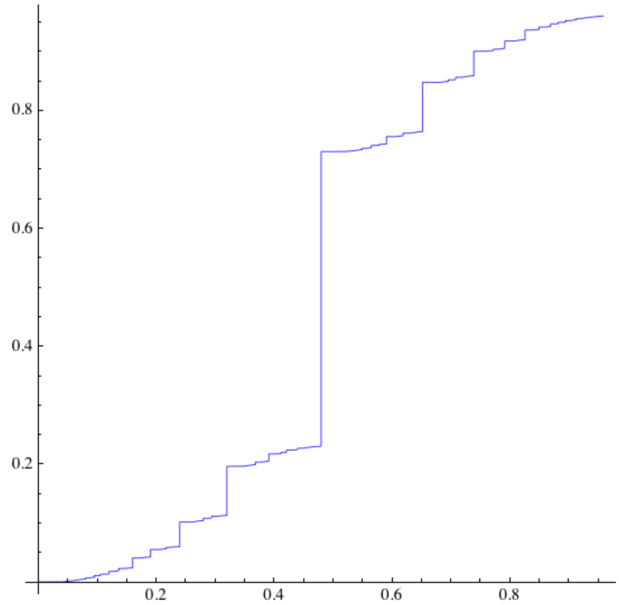

FIGURE 1. Une fonction continue en tout irrationnel !

géométrique de paramètre p) est

$$\sum_{n=1}^{\infty} np(1-p)^{n-1} = \frac{p}{1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}$$

Kevin peut *espérer* frimer sur le destrier de la mort après 333 jours environ, donc.
La probabilité d'arriver à la dropper en moins de 210 jours est

$$P(X \leqslant 210) = \sum_{n=1}^{\infty} p(1-p)^{n-1} \approx 0.4679 \text{ (calculette)}$$

Les chances de réussite aux concours de Kevin semblent en tout cas des plus faibles...

Exercice 9.
Le plus parlant est de faire un arbre. On peut s'en passer : l'évènement "A descend B" peut s'exprimer comme réunion des évènements "A descend B d'entrée", "A rate B qui rate A, puis A descend B" etc, qui donne une probabilité totale de

$$p + (1-p)(1-q)p + (1-p)^2(1-q)^2p + \ldots = p\frac{1}{1-(1-p)(1-q)} = \frac{p}{p+q-pq}.$$

Si $p = q$ on vérifie que A est avantagé de tirer le premier (cf. bataille de Fontenoy).
Exercice 10.
Le plus parlant est encore de faire un arbre. Si A descend B, il est mort. Pareil pour B s'il descend A au lieu de C. Sans faire les calculs extensivement, on peut présumer que A ferait mieux de ne pas risquer de tuer B (ni B de tuer A). Donc A comme B tirent exclusivement sur C.
Si A descend C (proba 0.3), alors cela devient un duel avec loi géométrique, avec B qui tire en premier et d'après l'exercice précédent B a la probabilité $\frac{0.5}{0.5+0.3-0.15} = \frac{10}{13}$ de le gagner. Pour le refaire à neuf, la probabilité de survie de A **dans cette hypothèse** est la somme des probabilités des évènements où B rate A k fois de suite, et A rate B $k-1$ fois puis poum, soit

$$0,5 \times 0,3 + 0,5^2 \times 0,7 \times 0,3 + \ldots 0,5^k \times 0,7^{k-1} \times 0,3 + \ldots = \frac{0,5 \times 0,3}{1 - 0,5 \times 0,7} = \frac{15}{65} = \frac{3}{13}.$$

Autrement dit le pauvre A n'a que 3 chances sur 13 d'en réchapper dans ce cas de figure.
Si A rate C, c'est au tour de B.
Si B tue C, le duel A-B commence cette fois par A, qui a $\frac{0.3}{0.5+0.3-0.15} = \frac{6}{13}$, c'est mieux !
Si B rate C aussi, alors C va tuer B (l'adversaire le plus dangereux) et A rentre en duel avec la probabilité 0.3 de gagner (un seul coup !).
Donc si A tire sur C, il a une probabilité de survie de

$$0.3 \times \frac{3}{13} + .7 \times \big(.5 \times \frac{6}{13} + .5 \times \frac{3}{13}\big) = 0.09346\ldots$$

Il a largement intérêt à tirer en l'air ! Alors Si B tue C (50%) A a 6 chances sur 13 de gagner comme vu plus haut, et si C tue B A a encore 3 chances sur 13. Total 9 chances sur 26 (au moins 3 fois plus).

Exercice 11.
Si les chasseurs du Bouchonnois tuent en moyenne 5 vaches par an en suivant une loi de Poisson, c'est que le nombre de vaches tuées suit la probabilité $P(X=n) = e^{-5}\frac{5^n}{n!}$.
La probabilité pour que le nombre de vaches tuées par Gérard Frugier ne dépasse pas 7 vaut

$$\sum_{k=0}^{7} P(X=k) = \sum_{k=0}^{7} e^{-5}\frac{5^k}{k!} = \frac{2701}{21}e^{-5} \approx 0.8666$$

La probabilité de bredouille est simplement $e^{-5} \approx 0.0067$. Pauvres ruminants.

Exercice 12.
À chaque voyage la probabilité de tâcher la chemise blanche de B.H.L. vaut $p = 1/10$.
Soit n le nombre de ses voyages. La probabilité de se prendre k tartes est donnée par une loi binômiale, donc la probabilité de prendre *moins de* 5 tartes vaut

$$F(n) = \sum_{k=0}^{4} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

On veut savoir quand $F(n)$ passe en dessous des 10% puisque c'est la probabilité de l'évènement inverse qui nous intéresse. Un petit programme donne $F(78) \approx 0.0994$. À comparer avec l'espérance du nombre de tartes reçues, qui vaut $n/10$, elle-même à comparer (petit programme) au nombre de voyages pour que la probabilité de 5 tartes dépasse $1/2$, qui est 50.

Exercice 13.
Le problème du collectionneur de vignettes (*coupon collector problem*) est un grand classique.

a) La loi de X_k est une loi géométrique de probabilité $\frac{n-k}{n}$ puisque cette valeur – la probabilité de tirer une vignette inédite – est la même à chaque tirage. La probabilité q_n de compléter la collection avec n grenouilles, c'est à dire de ne tirer que des cartes nouvelles à chaque fois, est $q_n = \frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\cdots\frac{1}{n} = \frac{n!}{n^n}$ qui est équivalent à $\sqrt{2\pi n}\,e^{-n}$ par la formule de Stirling (on peut s'en passer pour trouver que $q_{n+1}/q_n \to e^{-1}$).

b) L'espérance $E(T)$ de la v.a. $T = X_1 + \ldots X_{n-1}$, c'est à dire le nombre total moyen de grenouilles à acheter pour complèter la collection, est par indépendance la somme des espérances de ces lois géométriques, soit

$$E(T) = E(X_1) + \ldots E(X_{n-1}) = \frac{n}{n} + \frac{n}{n-1} + \ldots \frac{n}{n-(n-1)} = n \times \Big(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \ldots 1\Big) = n\,H_n.$$

c) Il est alors classique que $E(T) \sim n \ln n$. La probabilité pour Ron de faire une crise de foie est donc considérable.

d) Par indépendance encore on a

$$V(T) = V(X_1) + \dots V(X_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k/n}{(1-k/n)^2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{kn}{(n-k)^2}$$

En posant $k = n - p$ il vient

$$n \sum_{p=1}^{n} \frac{n-p}{p^2} = n^2 \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} - n \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$$

qui est majoré par son équivalent $n^2\zeta(2) = \dfrac{n^2\pi^2}{6}$ (le terme négatif est en $n \ln n$).

Exercice 14.
Chaque candidat est convoqué avec une probabilité $1/365$, donc la loi de X_n est $\sim \mathcal{B}(n, 1/365)$. L'idée est de l'approximer (ça se fait beaucoup en pratique) par $\mathcal{P}(\frac{n}{365})$.

Donc $P(X_{219} = 2) \approx e^{-219/365}(\dfrac{219}{365})^2/2! = e^{-0.6}.6^2/2 \approx .55 \times .18 = 5 \times .11\ 2 \times .09 = 0.099$ (vous n'avez pas oublié le 0 ? :))

Exercice 15.
Si tous les couples font leur devoir conjugal jusqu'à obtenir un garçon, la loi de (X = le nombre d'enfants engendrés pas un couple) est géométrique de paramètre $1/2$.
Dans notre modèle, tout couple a 1 garçon après avoir eu $X - 1$ filles ($X \in \mathbb{N}^*$) càd que $p_g = \dfrac{1}{X}$. Pour calculer l'espérance de p_g il faut donc utiliser le théorème de transfert, et il vient

$$E(p_g) = \sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^{k-1}\frac{1}{k} = -\ln(1 - \frac{1}{2}) = \ln 2 > 0.5$$

Pas étonnant qu'on trouve plus de garçons que l'espérance *a priori*.

Exercice 16.
Bref, la v.a. X vérifie la relation

$$\forall n \geqslant 1\ 3P(X = n+1) = 4P(X = n) - P(X = n-1)!$$

En général une telle suite récurrente (en posant $p_n = P(X = n)$) vérifie $p_n = \lambda 3^{-n} + \mu 1^n$. P est une probabilité, donc les p_n sont $\geqslant 0$ et $\sum p_n = 1$. Donc $\mu = 0$ (convergence !) et

$$1 = \sum_{n \geqslant 0} \lambda 3^{-n} = \frac{\lambda}{1 - 1/3} \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$

La loi de $Y = X + 1$ définie par $P(Y = n) = P(X = n+1) = \dfrac{2}{3}3^{-n+1} = 2 \times 3^{-n}$ est donc bien géométrique de paramètre $1/3$, son espérance vaut donc 3.

Exercice 17.
Nugget jamais retourné a proba $(1-p)^k$. La proba que tous soient retournés au moins une fois est donc $\left(1-(1-p)^k\right)^N$. Ceci est > 0.9 pour $N > \frac{\ln 0.9}{\ln\left(1-(1-p)^k\right)} \approx \frac{.1}{(1-p)^{k]}}$ pour k grand.

Exercice 18.
La probabilité du résultat zéro pour une loi de Poisson de paramètre m est e^{-m}, tout simplement. Expérimentalement cette probabilité est estimée à $\dfrac{26}{200} = 0.13$, d'où $m = -\ln 0.13 \approx -2.04$. La probabilité pour qu'un couple ait 3 enfants est donc $e^{-m}\dfrac{m^3}{3!} \approx 0.184$.

Exercice 19.
Le nombre de truites attrapées par Josep est évidemment une loi de Poisson, d'espérance égale à 5 et donc de paramètre égal aussi à 5. La probabilité de faire 10 prises est donc $e^{-5}\dfrac{5^{10}}{10!} \approx 1,8\%$.
La probabilité que Josep, pêchant 50 jours par an, n'atteigne *jamais* 10 truites, est donc de $(1-0.018)^{50} \approx 0,40$. La probabilité pour qu'il atteigne au moins une fois la limite des dix truites est donc de 60% environ.

Exercice 20.
Pour arriver à égalité en 6 services il y a la probabilité $q = \binom{6}{3}p^3(1-p)^3$. À partir de là Rafael remportera le jeu s'il y a, soit une suite GPGPGP. . .GP suivie de GG (G=gagné, P=perdu), soit PGPG. . .PGGG. Le premier cas a une probabilité de $p^k(1-p)^k p^2$, le second une probabilité identique. En sommant sur k on trouve la probabilité de gain après une égalité, $\frac{40p^5(1-p)^3}{1-p+p^2}$. Il faut encore rajouter les jeux blancs (p^4), à 15 ($\binom{4}{1}p^4(1-p)$), et à 30 ($\binom{4}{2}p^4(1-p)^2$), pour un total de $-34p^6+64p^5+11p^4-40p^3-40p^2+\frac{40(p-1)}{p^2-p+1}+40$ (qui tend vers 0 quand $p \to 0$ et vers 1 quand $p \to 1$ comme prévu, la courbe ressemble à un $\int$).

Exercice 21.
Notons A l'évènement"sortir de la chaîne A", idem pour B, et D l'évènement "être défectueuse".
On nous demande la probabilité conditionnelle $P(A \mid D)$. Or par la loi de Bayes

$$P(A \mid D) = \frac{P(D \mid A)P(A)}{P(D)} = \frac{P(D \mid A)P(A)}{P(D \mid A)P(A) + P(D \mid B)P(B)} = \frac{0.1 \times 0.6}{0.1 \times 0.6 + 0.2 \times 0.4} = \frac{3}{7}$$

b) Si on connaît le nombre n de paires produites, le nombre de paires défectueuses suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/10)$ i.e. $P(X = k \mid Y = n) = \binom{n}{k}0.1^k.9^{n-k}$.
Donc

$$\begin{aligned}P(X = k) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} P(X = k \mid Y = n) \times P(Y = n) = \sum_{n\geqslant k}\binom{n}{k}0.1^k.9^{n-k} \times e^{-20}\frac{20^n}{n!}\\ &= \frac{20^k 0.1^k e^{-20}}{k!}\sum_{n\geqslant k}.9^{n-k}\frac{20^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{2^k e^{-20}}{k!}\sum_{p\geqslant 0}\frac{18^p}{p!} = \frac{2^k e^{-20}}{k!}e^{18} = \frac{2^k e^{-2}}{k!}\end{aligned}$$

et X suit une loi de Poisson de paramètre $2 = 20 \times 0.1$, comme de bien entendu.

Exercice 22.
Par dérivation de DSE on a $\sum nx^{n-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ et $\sum n(n-1)x^{n-1} = \dfrac{x}{(1-x)^3}$.
On en déduit en bricolant un peu

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{n}{2^{n-1}} = 4 \qquad \sum_{n\geqslant 0}\frac{n^2}{2^{n-1}} = \sum n \geqslant 0\frac{n(n-1)+n}{2^{n-1}} = 12$$

La loi de X s'obtient en sommant sur toutes les valeurs prises par Y : $P(X = i) = \frac{i+1}{2^{i+2}}$. Les deux lois ne sont pas indépendantes (cf. poly de cours) : par exemple

$$P((X, Y) = (0, 0) = 0 \neq P(X = 0)P(Y = 0) = \frac{1}{16}.$$

Rem : on trouve ce genre de loi en étudiant le « temps de la deuxième réussite » dans une suite infinie de pile ou face.

Exercice 23.
1) On a bien une proba sur Ω, car $\sum_{n\in\Omega} P(n) = \sum_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{\zeta(s)n^s} = 1$.

2) Si A_n est l'évènement « être un multiple de n », alors il vient $P(A_n) = \sum_{k\geqslant 1} P(kn) = \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{\zeta(s)(kn)^s} = \frac{1}{n^s}$ car $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^s} = \zeta(s)$.
Or $P(A_p \text{ et } A_q) = P(A_{pq})$ pour p, q premiers distincts (être divisible par p et par q premiers entre eux équivaut à être divisible par leur produit) d'où

$$P(A_p \text{ et } A_q) = \frac{1}{(pq)^s} = \frac{1}{p^s} = \times \frac{1}{q^s} = P(A_p) \times P(A_q)$$

c'est à dire que les évènements A_p, A_q, sont indépendants. Le même calcul avec une famille finie de nombres premiers distincts montre que ces évènements sont indépendants *dans leur ensemble*.
3) L'évènement E « n'être multiple d'aucun nombre premier » n'est autre que la conjonction (intersection) des $\overline{A}_p$: $E = \bigcap_{p\in\mathcal{P}} \overline{A}_p$.
Comme les A_p sont indépendants, leurs complémentaires le sont aussi. Donc si on pose $E_n = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A}_{p_k}$, où les p_k sont la séquence (ordonnée) (ou pas) des nombres premiers, on a par indépendance

$$P(E_n) = \prod_{k=1}^{n} P(\overline{A}_{p_k}) = \prod_{k=1}^{n} (1 - \frac{1}{p_k^s})$$

Donc (par le théorème du cours, puisque $E_{n+1} \subset E_n$)

$$P(E) = \lim_{n\to+\infty} P(E_n) = \prod_{p\in\mathcal{P}} (1 - \frac{1}{p^s})$$

Or le seul entier qui ne soit multiple d'aucun nombre premier est 1 ! Donc

$$\frac{1}{\zeta(s)} = P(\{1\}) = P(E) = \prod_{p \text{ premier}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \qquad \text{i.e.} \qquad \zeta(s) = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

Exercice 24.

$$E(\exp(\ell - S)) = \sum_n e^{\ell-n} P(S = n) \geqslant \sum_{n\leqslant\ell} e^{\ell-n} P(S = n) \geqslant \sum_{n\leqslant\ell} P(S = n)$$

Exercice 25.
L'inégalité de Bienaymé-Cebychev donne (compte tenu de ce que $X > 0$ i.e. $m - X$ n'est jamais $> m$)

$$P(X \geqslant 2m) = P(|X - m| \geqslant m) \leqslant \frac{V(X)}{m^2} = \frac{1}{m}$$

pour une loi de Poisson de paramètre m. Il s'agit de probabilités résiduelles : au delà du double du résultat attendu (l'espérance).

Pour $m = 1, 2, 10$ on calcule les valeurs exactes, soit $1 - \sum_{k=0}^{2m-1} e^{-m} \frac{m^k}{k!}$.

m	1/m	valeur exacte
1	1.	0.2642
2	0.5	0.1428
10	0.1	0.00345
20	0.05	0.0000532

ce qui montre bien que l'inégalité de Bienaymé-Cebychev est très grossière.

Exercice 26.
$P(X=1..10)=p(1+q+q^2+\dots q^9)=(1-q)(1+q+q^2+\dots q^9)=1-q^{10}$. Avec pour commencer $q=1-\dfrac{1}{10}$ on trouve donc $1-\left(1-\dfrac{1}{10}\right)^{10}\approx 0.65$
Avec un $p\to 0$, on trouve

$$P(X\leqslant 1/p)=1-(1-p)^{1/p}\to 1-1/e.$$

Pour trouver la médiane, on veut que $1-(1-p)^n\approx 1/2$ soit $n\ln(1-p)\to -\ln 2$. Si $p\to 0$ il faudra que $n\sim \ln 2/p$ c'est à dire que la médiane est à 70% de l'espérance (i.e. de la moyenne) environ.

Exercice 27.
Une façon de sommer la famille des $u_{\ell,k}$ donne $\sum_{\ell\geqslant 1}u_{\ell,k}=kp_k$ donc la famille (de réels positifs) est sommable ssi $\sum kp_k$ converge. En sommant dans l'autre sens on trouve $\sum_{k\geqslant 1}u_{\ell,k}=\sum_{k\geqslant \ell}p_k=P(X\geqslant \ell)$.

Exercice 28.
Soit X une v.a. réelle **bornée**. On a donc

$$G_X(t)=\sum_{i\in I}P(X=i)t^i=\sum_{n\in\mathbb{N}}P(X=i_n)t^{i_n}$$

si les (i_n) forment une énumération de l'ensemble des valeurs prises par X. Supposons $\forall n\in\mathbb{N}\ \alpha\leqslant i_n\leqslant\beta$. On en déduit par exemple

$$\sum P(X=i_n)|i_n|\in[|\alpha|,|\beta|]$$

et similairement la dérivée seconde en 1 est bornée aussi :

$$\sum P(X=i_n)|i_n(i_n-1)|\in[|\alpha(\alpha-1)|,|\beta(\beta-1)|]$$

puisque $\sum P(X=i_n)$ vaut 1.
Donc $G_X(t)$ admet des dérivées d'ordre quelconque en 1, i.e. X admet des moments de tous ordres.

Exercice 29.
a) On exprime la convexité de la fonction exp, prise au barycentre des points $-t,+t$ affectés des coefficients $\frac{1-x}{2}$ et $\frac{1+x}{2}$.
Puis (par exemple) on écrit

$$\operatorname{ch} t=1+\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4!}+\dots+\frac{t^{2n}}{(2n)!}+\dots\leqslant 1+\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{2^2 2!}+\dots+\frac{t^{2n}}{2^n n!}+\dots$$

car clairement $2^n n!<(2n)!$ pour $n\geqslant 2$.
b) D'après l'exercice précédent une v.a. bornée a des moments de tout ordre ; par ailleurs on a par croissance de l'espérance

$$E(e^{tX})\leqslant e^{-t}E\left(\frac{1-X}{2}\right)+e^{t}E\left(\frac{1+X}{2}\right)=\operatorname{ch} t\qquad (E(x)=0).$$

c) $E(e^{tS_n})=\prod E(e^{tX_n})=\prod E(e^{(ta_n)(X_n/a_n)})$.
Mais $e^{(ta_n)(X_n/a_n)}=e^{\tau x}$ où $\tau=ta_n, x=X_n/a_n\in[-1,1]$ (presque sûrement) donc on peut utiliser la majoration de la première question :

$$e^{(ta_n)(X_n/a_n)}\leqslant\frac{1-X_n/a_n}{2}e^{-ta_n}+\frac{1+X_n/a_n}{2}e^{ta_n}$$

et par croissance de l'espérance (et linéarité) il vient compte tenu de $E(X_n)=0$ (n'oubliez pas les hypothèses !)

$$\prod E(e^{(ta_n)(X_n/a_n)})\leqslant\prod \operatorname{ch}(ta_n)\leqslant\exp\left(\frac{t^2}{2}\sum a_i^2\right)$$

avec la majoration de ch.
Ceci est une étape de la démonstration de divers gros théorèmes de probas (Loi forte des grands nombres, notamment).

Exercice 30.
Cette démonstration du thm de Weierstrass est une des plus courtes, car le gros du travail est accompli par l'inégalité de Bienaymé-Tchébycheff. On a $E(S_n) = nx$ et $V(S_n) : nx(1-x)$ pour cette loi binomiale. Donc

$$\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ |x-\frac{k}{n}|\geqslant\alpha}} P(Z_n = k/n) = P(|Z_n - x| \geqslant \alpha) = P(|S_n - nx| \geqslant n\alpha) = P(|S_n - E(S_n)| \geqslant n\alpha) \leqslant \frac{V(S_n)}{n^2\alpha^2} = \frac{nx(1-x)}{n^2\alpha^2}$$

par Bienaymé-Tchébychef. Or $x(1-x) \leqslant 1/4$ sur $[0,1]$ (mon argument préféré : le graphe est une parabole, qui culmine... au sommet i.e. quand $x = 1/2$, milieu des 2 racines) d'où le résultat technique demandé.
Ensuite on constate que $\sum\limits_{k=0}^{n} p_k = 1$ où je note $p_k = \binom{n}{k}x^k(1-x)^k$; on a donc

$$B_n(f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k f(k/n) - \sum_{k=0}^{n} p_k f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^k \Big(f(\frac{k}{n}) - f(x)\Big).$$

On va distinguer les k/n proches de x et les autres : si $\varepsilon > 0$ est donné, par continuité uniforme $\exists\alpha > 0$ tel que pour tous x, k tels que $\left|\frac{k}{n} - x\right| \leqslant \alpha$ on ait $|f(\frac{k}{n}) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. On fixe ce α et on écrit

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leqslant= \sum_{k=0}^{n} p_k \Big|f(\frac{k}{n}) - f(x)\Big| = \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ |x-\frac{k}{n}|\geqslant\alpha}} p_k \Big|f(\frac{k}{n}) - f(x)\Big| + \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ |x-\frac{k}{n}|<\alpha}} p_k \Big|f(\frac{k}{n}) - f(x)\Big|$$

$$\leqslant \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ |x-\frac{k}{n}|\geqslant\alpha}} p_k\, 2\|f\|_\infty + \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ |x-\frac{k}{n}|<\alpha}} p_k \varepsilon \leqslant \frac{2\|f\|_\infty}{4n\alpha^2} + \varepsilon$$

car $\sum\limits_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ |x-\frac{k}{n}|<\alpha}} p_k \leqslant 1$ (et l'autre terme est majoré par la première question).
Comme α est fixé, pour n assez grand [$n \geqslant \|f\|_\infty/(2\varepsilon\alpha^2)$ mais peu importe la valeur exacte] on aura le premier terme inférieur aussi à ε, donc $|B_n(f)(x) - f(x)| \leqslant 2\varepsilon$ indépendamment de x, cqfd.

Exercice 31.
1) Avec les fonctions génératrices on retrouve le résultat fameux que la loi de la somme de deux v.a. ayant des lois de Poisson (indépendantes) a une loi de Poisson aussi, de paramètre la somme des paramètres.
On peut aussi le faire à la main, car (avec l'indépendance)

$$P(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)P(Y=n-k) = \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\mu}\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} = e^{-\lambda-\mu}\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}$$

2) On utilise la formule de Bayes : $P(X = k \mid X+Y = n) = P(X+Y = n \mid X = k) \times \dfrac{P(X=k)}{P(X+Y=n)}$.
Or $P(X = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}, P(X+Y=n) = e^{-\lambda-\mu}\dfrac{(\lambda+\mu)^n}{n!}$ et enfin en regardant l'évènement on

s"aperçoit (perlipopette) que

$$P(X+Y=n \mid X=k) = P(Y=n-k) = e^{-\mu}\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}$$

d'où

$$P(X=k \mid X+Y=n) = \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}\frac{\lambda^k}{k!}\frac{n!}{(\lambda+\mu)^n} = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

en posant $p = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}$. On peut qualifier ce résultat d'intuitif, on reconnait une loi binômiale où p est la probabilité de choper une truite plutôt qu'une perche.

Exercice 32.
On se souvient que $P(X_i > n) = q^n$. Alors (indépendance des évènements, par lemme des coalitions)

$$P(Y > n) = P(\text{tous les } X_i > n) = \prod P(X_i > n) = q^{nN}$$

par indépendance. On en déduit

$$P(Y=n) = P(Y > n-1) - P(Y > n) = q^{(n-1)N} - q^{nN} = q^{(n-1)N}\left(1-q^N\right)$$

càd une loi géométrique de paramètre $p' = q^N$.

Exercice 33.
La fonction génératrice de la loi uniforme sur $\{1,\dots,n\}$ est $G(t) = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{t^k}{n} = \dfrac{t-t^{n+1}}{n(1-t)}$.
On peut retrouver sa dérivée en 1 par un développement limité ou directement :

$$G'(1) = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n} = \frac{n+1}{2} \qquad G''(1) = \sum_{k=1}^{n}\frac{k(k-1)}{n} = \frac{n^2-1}{3}$$

ou analytiquement,

$$G(t) = G(1-h) = 1 - \frac{n+1}{2}h + \frac{n^2-1}{6}h^2 + o(h^2)$$

et on retrouve ainsi espérance ($= G'(1) = \dfrac{n+1}{2}$) et variance ($= G''(1)+G'(1)-G'(1)^2 = \dfrac{n^2-1}{12}$ sauf erreur) de cette loi.

Exercice 34.
Dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P(X) = 1 + X + X^2 + \dots X^{10} = \dfrac{X^{11}-1}{X-1}$ se factorise en 5 trinômes irréductibles de degré 2 car ses racines sont toutes non réelles (ce sont les racines 11^e de l'unité, 1 exceptée car $P(X)(X-1) = X^{11}-1$). Il ne peut donc s'écrire comme produit de deux polynômes de degré 5.
Un dé donne un nombre de 1 à 6, donc les fonctions génératrices des deux lois des deux dés sont de la forme

$$G_X(t) = p_1t^1 + p_2t^2 + \dots p_6t^6 = tA(t) \qquad G_Y(t) = tB(t)$$

où $A(t), B(t)$ sont des polynômes réels de degré 5 (au plus !), la loi de $X+Y$ a pour fonction génératrice $G_X \times G_Y(t) = t^2A(t)B(t)$. Si $X+Y$ avait une loi uniforme on aurait

$$G_X \times G_Y(t) = \frac{1}{11}(t^2 + \dots + t^{12}) \text{ i.e. } 11\,A(t)B(t) = P(t),$$

or il résulte du préliminaire que cela est impossible. Amusant, non ?

Exercice 35.
Si t reste fixé et n tend vers $+\infty$ avec $np \to \lambda$, alors $(1-p+pt)^n = \exp(n\ln(1-p+pt)) = \exp(np(t-1)+o(p)) = \exp(\lambda(t-1)+o(1)) \to e^{\lambda(t-1)}$, i.e. $g_{n,p}$ tend 5simplement, en tout cas]

vers la fonction génératrice d'une loi de Poisson de paramètre λ ce qui est cohérent avec la définition de la loi de Poisson comme limite d'une loi binômiale.

Exercice 36.
Soit X une v.a. réelle qui prend seulement 3 valeurs distinctes a, b, c. Son espérance est

$$E(X) = ap_A + bp_b + cp_c$$

et la donnée de sa variance permet de calculer

$$E(X^2) = a^2p_A + b^2p_b + c^2p_c$$

Compte tenu de

$$1 = p_A + p_b + p_c$$

les trois probabilités inconnues sont les solutions d'un système de Vandermonde, donc sont parfaitement déterminées. Plus généralement avec n valeurs distinctes il suffit de $n-1$ moments pour déterminer la loi.

Exercice 37.
Je donne juste une indication ou trois :
Soit G la fonction génératrice de la loi : $G(t) = \sum a_n t^n$. La fonction de génératrice de la loi de 2X est $H(x) = \sum a_n t^{2n}$ et on veut que

$$H(x) = G(x)^2 \iff \sum a_n t^{2n} = (\sum a_n t^n)^2 = \sum_n (\sum_{k=0^n} a_k a_{n-k}) t^n$$

On en déduit par PISE le système $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}$ avec des $a_n \in [0, 1]$. Prendre le plus petit n tel que $a_n > 0$ et montrer que c'est 1.

Si $\omega \in \widetilde{E}$ c'est que ω se trouve dans toutes les $\bigcup_{k\geqslant n} E_k$. Donc dans au moins un E_k, même si on impose $k \geqslant n$: ça fait beaucoup de k!
Ensuite on trie / on ordonne les E_k en commençant par celui de plus grande probabilité : il existe car à partir d'un certain rang on aura $P(E_k) < P(E_0)$ par exemple (critère de non DVG), donc le plus probable est avant ce rang. Ensuite on cherche l'évènement de plus grande probabilité parmi les restants, etc.
Puis $\sum_{k\geqslant N} P(E_k)$ est le reste d'une série supposée convergente, donc tend vers 0. Enfin, observons que $\widetilde{E} \subset \bigcup_{k\geqslant n} E_k$ pour tout n, donc $P(\widetilde{E}) \leqslant P(\bigcup_{k\geqslant n} E_k)$ et

$$P(\widetilde{E}) = P(\bigcap_{n\geqslant 1} \bigcup_{k\geqslant n} E_k) \leqslant \operatorname{Inf}_n P(\bigcup_{k\geqslant n} E_k) \leqslant \operatorname{Inf}_n \sum_{k\geqslant n} P(E_k) = 0.$$

Exercice 38.
a) $1 - P(\widetilde{E})$ est la probabilité du complémentaire de $\widetilde{E}$, soit de

$$\Omega \setminus \bigcap_{n\geqslant 1} \bigcup_{k\geqslant n} E_k = \bigcup_{n\geqslant 1} \bigcap_{k\geqslant n} \bar{E}_k.$$

On applique le théorème de continuité croissante à la suite des $\bigcap_{k\geqslant n} \bar{E}_k$ (si si, elle croît).
b) L'inégalité demandée résulte de la convexité de exp. Puis

$$P(\bigcap_n \bar{E}_n) = \prod_n (1 - P(E_n)) \leqslant \exp(\sum_n -P(E_n)) = e^{-\infty} = 0.$$

c) Avec les chimpanzés, $E_n \sim \mathcal{B}(p)$ avec $p \ll 1$! On n'a pas vraiment besoin du lemme, mais...
p est de l'ordre de $1/C^N$ où C est le nombre de caractères du clavier et N le nombre de caractères frappés pour produire le texte. p est infinitésimal, néanmoins fixé et > 0, et $\sum p$ est divergente...

L'espérance du premier jour où un chimpanzé y arrive (loi géométrique) est $1/p$, qui tend donc très vite vers l'infini avec N.