Réduction des endomorphismes MP

EXERCICE 1. *Calculer le polynôme de* $\mathbb{Q}[X]$ *de degré minimal (c'est 8) qui annule* $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$*.*
Quel est le polynôme minimal d'un projecteur ? d'une symétrie ?

EXERCICE 2. *On considère l'espace vectoriel* E *sur le corps* $\mathbb{K}$, $x \in E$ *et* $u \in \mathcal{L}(E)$. *Montrer que le noyau de l'application* $\mathbb{K}[X] \ni P \mapsto P(u)(x) \in E$ *est un idéal de* $\mathbb{K}[X]$. *Comparer au noyau de* $P \mapsto P(u)$.

EXERCICE 3. *Trouver les éléments propres des endomorphismes suivants :*
a) Un endomorphisme de rang 1 .
b) Dans $\mathbb{K}[X]$, $u : P \mapsto X P' - P$.
c) Dans $C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $f \mapsto f''$. ** En déduire que si l'on pose, pour* $n \in \mathbb{N}, f_n(x) = \sin nx$ *et* $g_n(x) = \cos nx$ *alors la famille* $(g_0, f_1, g_1, \dots, f_n, g_n)$ *est libre.*

EXERCICE 4. *Montrer qu'un endomorphisme* u *est une homothétie si, et seulement si, toute droite est stable par* u*, autrement dit si tout vecteur est propre.*
En déduire que si u *n'est* ***pas*** *une homothétie du plan vectoriel* P*, alors* u *admet une matrice de la forme* $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$*, puis enfin que deux matrices* ***non scalaires*** 2×2 *sont semblables si, et seulement si, elles ont même trace et même déterminant.*
Donner un contre-exemple en dim 3.

EXERCICE 5. *On pose* $L_n = D^n(U_n)$ *où* $U_n = (X^2-1)^n$ *(*D^n *=dérivée* $n^{\text{ème}}$*).*
Ainsi $L_0 = 1, L_1 = 2X, L_2 = 12X^2 - 24X + 12, \dots$. *Montrer que* $(X^2-1)U_n' = 2nXU_n$. *En déduire que* $(X^2-1)L_n'' + 2XL_n' = n(n+1)L_n$, *i.e. que* L_n *est vecteur propre de l'endomorphisme*

$$\Delta : P \mapsto (X^2-1)P'' + 2XP'$$

de l'espace $\mathbb{R}[X]$ *des polynômes.*
** Montrer que l'espace propre* $E_{n(n+1)} = \operatorname{Ker}(\Delta - n(n+1)\operatorname{id})$ *est* $\operatorname{Vect}(L_n)$. *Spectre de* Δ *?*

EXERCICE 6. *Éléments propres des matrices suivantes :*

$$\begin{pmatrix} 2003 & 42 & \dots & 42 \\ 42 & 2003 & \dots & 42 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 42 & \dots & \dots & 2003 \end{pmatrix} \qquad * \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b & a & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b & a & b & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & b & a & b \\ 0 & \dots & 0 & 0 & b & a \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 & b \\ & \ddots & & \iddots & \\ 0 & \dots & a+b & 0 & \dots \\ & \iddots & & \ddots & \\ b & 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix}$$

Indications :*pour la première, se ramener à une matrice de rang 1 ; * pour la seconde, revenir à la définition pour se ramener à la récurrence linéaire* $x_{k+1} + (\frac{a}{b} - \lambda)x_k + x_{k-1} = 0$ *avec les conditions* $x_0 = x_{n+1} = 0$. *Pour la troisième, fabriquer les vecteurs propres à la main !*

EXERCICE 7. † *On suppose que* $P(u) = 0, u \in \mathcal{L}(E), P = Q.R \in \mathbb{K}[X], Q \wedge R = 1$ *(ouf!).*
Montrer que $\operatorname{Im} Q(u) = \operatorname{Ker} R(u)$ *et réciproquement.*
Exemple : on pose $A = \begin{pmatrix} -7 & 9 & 12 \\ -18 & 20 & 24 \\ 9 & -9 & -10 \end{pmatrix}$. *Vérifier que* $\chi_A(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-2)^2$, *déterminer des bases de* $\operatorname{Ker}(A+I), \operatorname{Im}(A+I)$ *et diagonaliser* A.

EXERCICE 8. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *; montrer en factorisant le polynôme minimal que tout endomorphisme possède au moins une droite ou un plan stable. On montrera que* u *admet un plan (ou une droite) stable ssi il existe des coefficients* a, b *tels que* $u^2 + au + b\,\mathrm{id}$ *ne soit PAS injectif.*

EXERCICE 9. † *Les deux matrices **réelles*** A, B *sont semblables **dans*** $\mathbb{C}$, *i.e. il existe une matrice* $P \in GL_n(\mathbb{C})$ *telle que* $AP = PB$. *Établir l'existence de matrices **réelles*** M *telles que* $AM = MB$, *puis prouver que certaines (combinaisons linéaires) de ces matrices sont inversibles, ce qui prouvera que* A, B *sont semblables aussi **dans*** $\mathbb{R}$.

EXERCICE 10. *(spectre simple et matrice compagne) On suppose que* f *possède* $n = \dim E$ *v.p. distinctes* $\lambda_1 \ldots \lambda_n$. *À l'aide d'une base de vecteurs propres associés* $(e_1 \ldots e_n)$, *fabriquer un vecteur* x *tel que* $(x, f(x), \ldots f^{n-1}(x))$ *soit une base de* E. *Quelle est la matrice de* f *dans cette dernière base ?*

EXERCICE 11. *On considère une matrice* compagne *:* $a_{i,i-1} = 1$ *et* $a_{i,j} = 0$ *sinon pour* $i = 1 \ldots n-1$, *et on note* $a_{1,n} = -\alpha_0, \ldots a_{n,n} = -\alpha_{n-1}$ *:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & -\alpha_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

On suppose que $A.X = \lambda X$. *Montrer que ce système contient au moins* $n-1$ *équations indépendantes. Que peut-on dire des dimensions des espaces propres ?*
Combiner les équations pour éliminer les composantes (x_i) *de* X, *en déduire le polynôme caractéristique de* A.

EXERCICE 12. *a) (Sup) Montrer le lemme de Jacques* HADAMARD *: si une matrice* $A = [a_{ij}]$ *est telle que* $\forall i = 1 \cdots n\ |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ *(on dit qu'elle est à **diagonale dominante**) alors* A *est inversible (raisonner sur un vecteur colonne* X, *supposé non nul, tq* $A.X = 0$*).*
*b) Applications : **cercles de Gerschgorin**. Avec la définition d'une valeur propre, montrer que le spectre d'une matrice* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *quelconque est inclus dans la réunion des disques*

$$D_i = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}| \leqslant \sum_{j \neq i} |a_{ij}|\}.$$

EXERCICE 13. *Élements propres de l'endomorphisme* u *de* $E = \mathbb{K}_3[X]$ *qui associe à* P *le reste de la division euclidienne de* $(X^4 - 1)P(X)$ *par* $X^4 - X$ *(calculatoire).*

EXERCICE 14. *Diagonaliser les matrices suivantes, calculer leurs puissances $n^{\text{ièmes}}$:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} \quad *\, D = \begin{pmatrix} 0 & \sin\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin\varphi & 0 & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & \sin\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 15. *On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A^2 + 2A + 2I_n = 0$. Que dire des v.p. de A ? Est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{C}$? En déduire que n est pair ainsi que trace et déterminant de A (voire même l'expression de χ_A).*

EXERCICE 16. *(prom'nons nous dans* $\mathrm{Vect}(A, B)$*)*

*On suppose que $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifient pour $C = A + B, C^2 = 2A + 3B$ et $C^3 = 3A + 4B$. Trouver un polynôme annulateur de C. * Conclure.*

EXERCICE 17. $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ *vérifie $f^4 = f^2$ et f admet 1 et -1 comme valeurs propres. Que dire des dimensions des espaces propres ? Conclure.*

** Donner un exemple (matrice) en dimension 4 où f n'est pas diagonalisable.*

EXERCICE 18. *On considère un endomorphisme diagonalisable ; montrer que sa restriction à un sev stable reste diagonalisable. En déduire que (toujours si u est diagonalisable !) tout sev stable est somme directe de droites propres.*

Application : *trouver les sev stables de A et B ci-dessus. Idem en appliquant l'exo suivant :*

EXERCICE 19. *Hyperplans stables.*

On rapporte $E = \mathbb{K}^n$ à sa base canonique et on considère un endomorphisme u de matrice A. Soit H un hyperplan d'équation $L.X = 0$, où L désigne un vecteur ligne et X une colonne indéterminée (par exemple $L = (2, 0, 3)$ pour le plan $2x + 3z = 0$). Montrer que H est stable par u ssi ${}^tL$ est un vecteur propre de ${}^tA$. Généraliser en dimension n.

EXERCICE (PRODUITS TENSORIELS).

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Montrer que $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ est diagonalisable $\iff A = 0$.*

Variante : montrer que si A est diagonalisable, alors $B = \begin{pmatrix} 4A & 3A \\ -2A & -A \end{pmatrix}$ l'est aussi [bricoler des vecteurs propres pour B à partir de ceux de A].

EXERCICE 21. *Étudier les matrices de rang 1 : si M est une telle matrice, montrer qu'il existe deux vecteurs non nuls $A = (a_1 \dots a_n), B = (b_1 \dots b_n)$ tels que $M = [a_i \times b_j] = {}^tA.B$ (colonne $\times$ ligne).*

En déduire M^2 en fonction de M. Quel peut être le spectre de M ? Son polynôme minimal ? À quelle condition M est-elle diagonalisable ?

EXERCICE 22. *Calculer les limites suivantes (en prouvant leur existence, œuf corse) :*

$$\lim_{n\to+\infty} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{5^k} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}^k.$$

Que peut-on affirmer des valeurs propres (dans $\mathbb{C}$) d'une matrice A telle que (A^n) converge ?

EXERCICE 23. *Un petit exo avec une matrice probabiliste : une multinationale envoie chaque année 1/4 de ses gains américains en Europe, et autant au Japon. Le reste demeure à Redmond. En revanche, les filiales japonaise et européenne rendent la moitié de leurs gains à la maison mère. Modéliser le système sous la forme* $X_{n+1} = A.X_n$*, donner son état limite (on part de* $\$2B$ *aux States, autant au Japon,* 0 *en Europe !)*

EXERCICE 24. † *Les deux exos précédents travaillent sur des matrices d'un type particulier. On appelle* matrice stochastique *toute matrice carrée* A *dont les coefficients sont positifs et vérifient* $\forall j = 1 \dots n \ \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = 1$ *(pour certains auteurs on préfère que la somme* des lignes *vale 1). Elles modélisent* des schémas de transition, *avec* $a_{i,j}$ = *probabilité de passer de l'état* E_j *à l'état* E_i *(la relation précédente est donc la loi des probabilités totales). Une toute petite introduction aux matrices stochastiques : soit* $\mathcal{S}_n$ *l'ensemble des matrices stochastiques de taille* n*.*

— *Montrer que* $\mathcal{S}_n$ *est convexe et borné (c'est* l'enveloppe convexe *de l'ensemble des matrices de permutations).*
— *Montrer que* $\mathcal{S}_n$ *est stable par produit. Est-ce une sous-algèbre de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *?*
— *Montrer que toute matrice stochastique admet la valeur propre 1 et que tout élément de son spectre est de module* $\leqslant 1$*.*

C'est une étude approfondie de ces matrices et notamment du comportement de leurs puissances (théorème de Perron-Frobenius) qui est à la base de l'algorithme PageRank™ breveté par Larry Page et Sergueï Brin, les créateurs multi-milliardaires de Google. Qui a dit que les matheux crèvent de faim ?

EXERCICE 25. † *On considère deux endomorphismes d'un* $\mathbb{C}$*-ev* u *et* v *qui commutent. Montrer qu'ils possèdent un vecteur propre commun (s'intéresser à la restriction de* v *à un sev propre de* u*).*

** En reprenant la démonstration du thm du cours, montrer alors qu'il existe une base dans laquelle* u *et* v *ont* ***tous les deux*** *une matrice triangulaire.*

Enfin, si u *et* v *sont toutes deux diagonalisables, montrer qu'ils le sont dans une même base.*

EXERCICE 26. *(Cas particulier du précédent).* †

On considère un endomorphisme u *et on définit* le commutant *de* u *comme l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec* u*.*

a) Montrer que c'est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$*. Est-elle commutative ?*

b) On suppose que u *a* n *valeurs propres distinctes. À l'aide de l'exercice précédent, ou directement, montrer que ses éléments sont exactement ceux qui diagonalisent dans une même base que* u*, et qu'ils se réduisent aux polynômes en* u*.*

EXERCICE 27. *Soit* A *une matrice diagonalisable ,* X *un vecteur colonne ; montrer que*

$$A.X = 0 \iff A^2X = 0 \iff A^3X = 0 \iff \dots A^{2049}X = 0$$

EXERCICE 28. *Montrer que* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ *est semblable à sa transposée. À votre avis, est-ce général ?* *(une mignonette de champagne en jeu. . .)*

EXERCICE 29. ***Racine carrée d'une matrice*** †

a) Montrer qu'une matrice carrée ***diagonalisable*** A *possède plusieurs racines carrées* R *dans* $M_n(\mathbb{C})$ *(i.e.* $R^2 = A$*). En proposer une qui ait une infinité de racines carrées.*
b) On suppose que la matrice réelle A *possède* n *vp* ***distinctes*** *réelles positives ; montrer que toute racine carrée* R *de* A *est aussi diagonalisable (on pourra revoir l'exercice 25, b)), et dans une même base que* A*. En déduire le nombre* ***exact*** *de racines carrées de* A*.*
c) Montrer qu'il existe des matrices qui n'admettent pas de racine carrée dans $M_n(\mathbb{C})$*.*

d) Résoudre $R^2 = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ *dans* $M_3(\mathbb{R})$ *et* $S^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *dans* $M_4(\mathbb{C})$*.*

Y a-t-il des solutions S *dans* $M_4(\mathbb{R})$ *?*

EXERCICE 30. *a) Trigonaliser* $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin t \\ -1 & 0 & \cos t \\ -\sin t & \cos t & 0 \end{pmatrix}$*. Puissance* $n^{\text{ième}}$ *?*

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *sont-elles semblables ?*

EXERCICE 31. *Sous-espaces stables des endomorphismes de matrices :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix} \qquad \text{dans } \mathbb{R}^3 \text{ et } \mathbb{C}^3 \text{ respectivement.} \quad (j^3 = 1)$$

EXERCICE 32. $A \in \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{C}), B = A^2$ *; montrer que* A *est diagonalisable ssi* B *l'est.*
Est-ce encore vrai dans $\mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R})$ *? Ou à défaut si* $B = A^p, p \in \mathbb{N}^*$ *?*

EXERCICE 33. *Soient* $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ *tels que* $f \circ g - g \circ f = f$*.*
a) † Calculer $f^n \circ g - g \circ f^n$*, en déduire que* f *est nilpotent.*
b) †† On suppose que $f^{n-1} \neq 0 = f^n$*, montrer que* f *admet une matrice de la forme*
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 \end{pmatrix}$$
c) Mêmes hypothèses (a+b), montrer que g *admet* n *valeurs propres en progression arithmétique.*

EXERCICE 34. ** Soit* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$*. Montrer que* M *est nilpotente ssi* $\forall k \in \mathbb{N}^* \ \mathrm{Trace}(M^k) = 0$*.*
Pour cela, en notant m_i *la multiplicité de la valeur propre* λ_i*, on trigonalisera* M *et on en déduira un redoutable système linéaire en les* m_i*.*

EXERCICE 35. ** Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$*. On définit* $U \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$ *par* $U(v) = u \circ v - v \circ u$*.*
a) Montrer que si u *est diagonalisable, alors* U *aussi et préciser son spectre en fonction de celui de* u*. On se ramènera à avoir la matrice de* u *diagonale, et on écrira la matrice de* U *dans la base canonique* $E_{1,1} \dots E_{1,n}, E_{2,1} \dots E_{n,n}$ *de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*.*
b) Que dire si u *est nilpotent ? (cf. exercice 33)*

EXERCICE 36.

a) † On considère un endomorphisme dont une matrice a la forme d'une matrice compagnon (cf. exemple dans le cours et exercice 11). Montrer que les espaces propres sont de dimension 1.

b) Réciproquement, on considère $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour un certain $x_0 \in E$, la famille des itérés par u engendre E : $E = \mathrm{Vect}(x_0, u(x_0), \dots u^k(x_0) \dots)$.
En examinant la démonstration du cours du théorème de CAYLEY-HAMILTON, *montrer que $(x_0, u(x_0), \dots u^{n-1}(x_0))$ est une base de E (de dimension n). Exprimer $\mathrm{Mat}(u)$ dans cette base.*

EXERCICE 37.

1) $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutent et B est nilpotente. Montrer que

$$\mathrm{rg}(AB) < \mathrm{rg}\, A.$$

2) En déduire que n matrices nilpotentes qui commutent ont leur produit nul (X MP – sans la première question...)

EXERCICE 38. Exponentielle de matrices.

0) En posant $\|A\| = n\,\mathrm{Max}|a_{i,j}|$ pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, montrer que $\|A \times B\| \leqslant \|A\|\|B\|$ et en déduire que l'application $\exp : A \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$ est définie et continue sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

a) Montrer que **si les deux matrices commutent**, *alors $\exp(A+B) = \exp(A).\exp(B)$. En déduire que $\exp(A)$ est toujours inversible (on admettra que le concept de sommabilité s'étend aux algèbres de dimension finie...)*

b) À l'aide d'une trigonalisation (dans $\mathbb{C}$), montrer que les valeurs propres de $\exp(A)$ sont les exponentielles de celles de A, puis que $\det[\exp(A)] = e^{\mathrm{Trace}\, A}$. Donner un exemple de matrice réelle inversible qui ne soit pas l'exponentielle d'une matrice réelle.

c) (question de topologie) Montrer que $\exp A \in \mathbb{K}[A]$.

d) (tentative de réciproque) exp est elle polynômiale ?

e) Calculer directement ou par diagonalisation $\exp(A_k)$ pour $A_k = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix}$. En déduire les exponentielles de $A, B, A+B$ quand

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ -\pi & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & \pi(7+4\sqrt{3}) \\ -\pi(7-4\sqrt{3}) & 0 \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 39. *On se place dans $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on note $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices diagonalisables.*

On pose $\Omega = \{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E \mid (a-d)^2 + 4bc > 0\}$, $F = \{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E \mid (a-d)^2 + 4bc \geqslant 0\}$.

1) *Montrer que Ω et F sont respectivement ouvert et fermé dans E.*

2) *Montrer que $\Omega \subset \mathcal{D} \subset F$.*

3) *On considère une matrice A telle que $(a-d)^2 + 4bc = 0$, i.e. $A \in F \setminus \Omega$. Montrer qu'il existe une suite de Ω qui converge vers A, et aussi une suite de $E \setminus \Omega$.*
En déduire que Ω est l'intérieur de $\mathcal{D}$, et F son adhérence. $\mathcal{D}$ est-il ouvert ? Fermé ?
(d'après E4A PSI 2018)