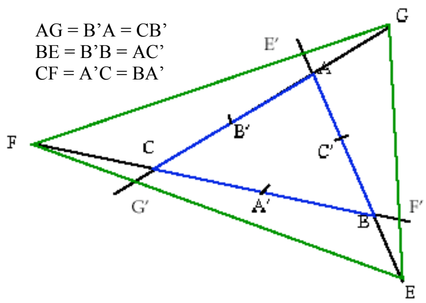
RÉVISIONS D' ALGÈBRE LINÉAIRE ÉLÉMENTAIRE MP

EXERCICE 1. *On considère la famille des applications* $(x \mapsto |x - a_i|)$ *où* $i = 1, 2 \dots n$*, dans l'ev* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. *Les* a_i *sont des réels distincts. Montrer que la famille est libre.*
Idem pour les applications $f_i : x \mapsto e^{a_i x}$ *(une méthode utilise les dérivées).*

EXERCICE 2. p *et* q *sont deux projecteurs. Par des calculs dans* $L(E)$*, montrer que*

$$p + q \text{ est un projecteur } \iff p \circ q = q \circ p = 0.$$

EXERCICE 3. *(Exercice proposé par Le Monde.) Une affaire de colinéarité.*



Montrer que (par exemple) $G'E = 3FG'$.

EXERCICE 4. Automorphismes de corps de $\mathbb{R}$**.** †

a) *On prend une application* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *qui soit* additive, *c'est à dire que* $\forall x, y \in E$ $f(x+y) = f(x) + f(y)$. *On a donc* $f(0) = 0$. *Montrer que* f *est* $\mathbb{Q}$*–linéaire, c'est à dire que* $f(qx) = qf(x)$ *pour tout* $q \in \mathbb{Q}$ *(commencer par* $q \in \mathbb{N}$*).*

b) *On suppose que* f *est un automorphisme du corps* $\mathbb{R}$*, c'est à dire qu'on rajoute l'hypothèse*
$f(xy) = f(x)f(y)$ *et* $f(1) = 1$. *Montrer que* $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$ *et en déduire que* f *est croissante, puis que* f *est l'identité (on rappelle que tout réel est limite de deux suites adjacentes de rationnels).*

c) *Montrer que tout automorphisme* **continu** *de* $\mathbb{C}$ *est l'identité ou la conjugaison.*

EXERCICE 5. *Dans l'espace* E *des applications indéfiniment dérivables de* $\mathbb{R}$ *dans lui-même, on considère les endomorphismes :* $\Delta : f \mapsto f'$ $\quad P : f \mapsto \left(x \mapsto \int_0^x f\right)$. *Déterminer les images, les noyaux et les sous-espaces des vecteurs invariants par* Δ, P *et* $\Delta \circ P, P \circ \Delta$.

EXERCICE 6. *Soit* $A \in E = \mathbb{K}_n[X]$ *; montrer qu'il existe un unique* $P \in E$ *tel que* $P(X+1) + P(X) = A(X)$.

EXERCICE 7. ** Soit F un sev de E, et G un groupe fini d'automorphismes de E dont chaque élément laisse F stable. On veut montrer qu'il existe un supplémentaire de F stable par tout élément de G.*

a) *Soit p un projecteur d'image F, et q défini par $q = \dfrac{1}{n}\sum_{g\in G} g\circ p\circ g^{-1}$ n étant le cardinal de G.*

Montrer successivement que

- *Pour $f \in G$ fixé, $f \circ g$ décrit G quand g parcourt G (i.e. $g \mapsto f \circ g$ est bijective).*
- $\forall f \in G \quad f \circ q = q \circ f$
- $\mathrm{Im}\, q \subset F$ *; en déduire que $p \circ q = q$;*
- *q est un projecteur.*

b) *Établir que $\mathrm{Im}\, q = F$, montrer que $q \circ p = p$ (que dire de $q(x)$ quand $x \in F$?) et que $\mathrm{Ker}\, q$ est un supplémentaire de F invariant par tout élément de G.*

EXERCICE 8. $E = \mathbb{K}_n[X]$, *sev des polynômes de degré $\leqslant n$.*

On considère l'application $P \mapsto \Delta(P) = Q$ où $Q(X) = P(X+1) - P(X)$.

Montrer que Δ est un endomorphisme, chercher son noyau, son image, l'image de la base canonique.

Idem avec l'endomorphisme défini par $L(P) = Q$ où $Q(X) = e^{+X^2} \times \dfrac{d}{dX}\left(e^{-X^2}P(X)\right)$ dans $\mathbb{K}(X)$.

EXERCICE 9. *Dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on considère les sous-ensembles des applications paires et impaires. Montrer que ce sont des sev, et qu'ils sont supplémentaires.*

EXERCICE 10. *Montrer que dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les sous-ensembles des matrices symétriques et des matrices antisymétriques sont deux sev supplémentaires.*

EXERCICE 11. *On considère l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de taille n. Montrer que c'est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Que diriez-vous de l'ensemble des matrices triangulaires supérieures n'ayant que des 1 sur la diagonale ?*

EXERCICE 12. *On considère une matrice triangulaire, dont tous les termes diagonaux sont non nuls.*

Montrer qu'elle est inversible, d'inverse triangulaire, avec autant de méthodes diverses que possible.

EXERCICE 13. *Soient F, G deux sous-espaces de E. Donner une CNS pour qu'il existe un endomorphisme d'image F et de noyau G. Cet exercice peut être fait en dimension finie ou (plus difficile !) infinie.*

EXERCICE 14. *On considère pour un endomorphisme u donné les sous espaces $E_1, E_2, \dots E_p$ définis par $E_k = \mathrm{Ker}(u - k\,\mathrm{id}) = \{x \in E \mid u(x) = kx\}$. Montrer qu'ils sont en somme directe. Attention, il ne suffit pas de considérer leurs intersections 2 à 2, mais il faut montrer que si $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \dots x_p \in E_p$ et $x_1 + \dots x_p = 0$ alors tous les x_i sont nuls (unicité de l'écriture). Pour cela, on appliquera $u - \lambda\,\mathrm{id}$ à $x_1 + \dots x_p \in E_1 + E_2 + \dots E_p$ pour diverses valeurs choisies de λ.*

EXERCICE 15. ***(Composantes de Fitting)***

On pose $K_n = \mathrm{Ker}(u^n)$ *et* $J_n = \mathrm{Im}(u^n)$ *où* $u \in \mathcal{L}(E)$*. Montrer que la suite* (K_n) *(resp.* (J_n)*) est croissante (resp. décroissante) pour* $\subset$*.*

On suppose que pour un certain rang r *on a* $K_{r+1} = K_r$ *; montrer qu'alors* $K_{r+1} = K_{r+2} = \ldots K_{r+k} = \ldots$ *(la suite stationne).*

Montrer que cela se produit forcément en dimension finie. Donner un exemple en dimension infinie (mettons si $E = \mathbb{R}[X]$*) où la suite* K_n *n'est pas stationnaire.*

Enfin montrer que si K_n *et* J_n *stationnent, c'est forcément au même rang* r *(au moins en dim finie) et que* $K_r \oplus J_r = E$ *(ce sont les* ***composantes de Fitting*** *associées à* u *: sur l'une,* u *est nilpotente, sur l'autre* u *est bijective).*

EXERCICE 16. *Soient* f *un endomorphisme et* x *un vecteur de* E *tels que* $f^n(x) = 0, f^{n-1}(x) \neq 0$*. Montrer que la famille* $(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ *est libre.*

EXERCICE 17. *On suppose que* $\mathrm{rg}\, f = 1$*, où* f *est un endomorphisme de* E*. Montrer que* f^2 *est proportionnel à* f *dans* $\mathcal{L}(E)$ *(situer* $f^2(x)$ *et* $f(x)$ *pour un* $x \in E$ *quelconque).*

EXERCICE 18. *On considère l'ensemble* $C(u)$ *des endomorphismes de* E *qui* **commutent** *avec l'endomorphisme* u*. Montrer que* $C(u)$ *est une sous-algèbre de* $\mathcal{L}(E)$*.*

Exemple : trouver $C(M)$ *quand* M *est la matrice* $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$.

On suppose dans ces dernières questions que $f, g \in \mathcal{L}(E)$, où E est de dimension finie.

EXERCICE 19. *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$*. Montrer que* $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Ker}\, u \iff u^2 = 0$ *et* $\dim E = 2 \,\mathrm{rang}\, u$*.*

EXERCICE 20. *(*$\mathbb{K}=\mathbb{R}$*) * On suppose que* $P(f) = 0$*, où* P *est un polynôme ayant 0 pour racine* ***simple****. Montrer que* $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, f^2$*, puis que* $\mathrm{Im}\, f$ *et* $\mathrm{Ker}\, f$ *sont supplémentaires.*

EXERCICE 21. *(difficile) Montrer qu'en dimension finie, deux sous-espaces de même dimension admettent un supplémentaire commun (récurrence possible sur la dimension...).*