30 juin 2018

Dans la plupart de ces exercices, une simulation par calculatrice ou ordinateur est vivement conseillée pour subodorer le comportement du terme général de la série.

EXERCICE 1. *Pour couper une tarte en 7, comment faire ? Facile : couper en 8, distribuer 7 parts, puis prendre ce qui reste, le couper en 8, etc. . . Est-ce généralisable à un découpage en 255 parts ?*

EXERCICE 2. *Quelle est la somme effectuée sur*

`http://www.smbc-comics.com/index.php?id=4071`

à votre avis ?

EXERCICE 3. ***Calculer** les sommes des séries suivantes via les sommes partielles ($\lfloor n \rfloor$ = partie entière de n) :*

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1} \qquad * \sum_{\substack{n=1\\ n\neq p}}^{+\infty} \frac{1}{n^2-p^2},\ p\in\mathbb{N}^* \qquad \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2n-1}{n^3-4n} \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \quad \text{(noter que } \tfrac{(-1)^n}{n+1} \text{ est une intégrale)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

$$\text{(plus fins)} \sum_{n=1}^{\infty} \arctan\frac{2}{n^2} \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin\frac{1}{n(n+1)}}{\cos\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n+1}} \qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{2^n} \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{\binom{n}{2}}}{n} \qquad \sum_{n\geqslant 0} 2^{-n}\,\mathrm{th}\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

Pour ce dernier on pourra évaluer $\coth x - 2\coth 2x$.

EXERCICE 4. *Encore de la tarte. Vous savez découper n'importe quel morceau de tarte en 2 morceaux égaux et donc aussi en 4,8. . . Comme vous avez $k = 5$ personnes à nourrir, vous commencez par couper en 8 et distribuer 5 huitièmes. Restent 3 parts, que vous découpez chacune en 2, obtenant 6 seizièmes dont vous distribuez 5, reste un morceau (quelle taille ?) que vous découpez en combien ? Ecrivez la série des portions successives de tarte reçues, expliquer la périodicité observée, calculer sa somme. Généraliser à k quelconque.*

EXERCICE 5. *Calculer* $\sum_{n\geqslant 1} \cos^{n-1}(x)\cos((n+1)x)$.

EXERCICE 6. *Convergence des séries de termes généraux :*

$$u_n = \frac{3}{\sqrt{n}+2^{(-1)^n}} \quad u_n = \sqrt[3]{n^3+an} - \sqrt{n^2+3} \quad \text{(discuter)} \quad u_n = \frac{2^n\, n!}{n^n} \quad u_n = n^{-\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n})}$$

$$u_n = \frac{\ln(\ln n)}{n^{1{,}0004}} \quad u_n = \left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^\alpha} \quad u_n = (n+\sqrt{\pi})^\alpha - n^\alpha \qquad u_n = \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n} \qquad u_1 = 2042; u_{n+1} = \frac{1}{n}e^{-u_n}$$

$$u_n = \tan(\pi\times(2-\sqrt{3})^n) \qquad u_n = e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad u_n = \mathrm{Arc}\cos\sqrt{1-\frac{1}{n^\alpha}} \qquad u_n = \frac{\ln n}{n}\ln(1+\frac{1}{n})$$

EXERCICE 7. *On considère la série* $\sum \frac{P(n)}{Q(n)}$ *où* P/Q *est une fraction rationnelle, sans pôles* $\geqslant 0$.
Montrer que cette série converge ssi $d^\circ P$ - $d^\circ Q < -1$.

EXERCICE 8. (u_n) *est une suite réelle. On suppose que* $\sum u_n^2$ *est convergente, en déduire par une habile majoration que* $\sum |u_n|/n$ *l'est aussi (*$u_n/n = u_n \times 1/n\ldots$*).*

EXERCICE 9. *On pose pour* $x_0 \geqslant 0 \quad x_{n+1} = \sqrt{\dfrac{x_n+1}{2}}$. *Montrer que* $x_n \to 1$.
La série de terme général $u_n = x_n - 1$ *est-elle (absolument) convergente ? (utiliser le critère de* D'ALEMBERT*). * Idem quand* $x_{n+1} = \sqrt{2-x_n}$.

EXERCICE 10. Vitesse de convergence et programmation *La série* $(\sum(-1)^n x^{2^n})$ *converge pour tout* $x \in]-1,1[$. *Pour* $x=1$, *les sommes partielles oscillent entre 1 et 0. Est-ce que la somme* $f(x)$ *de cette série tend vers* $1/2$ *quand* $x \to 1^-$ *? Pour voir, on va tracer le graphe de* $f : x \mapsto \sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n x^{2^n}$ **en garantissant la précision**.
Montrer que pour $x \in [0,1[$ *fixé, il existe un rang* n_x *dépendant explicitement de* x *pour lequel le reste de la série vérifie* $|r_{n_x}(x)| \leqslant 10^{-10}$. *Écrire une procédure qui calcule* $\tilde{f}(x) = \sum_{n=0}^{n_x}(-1)^n x^{2^n}$ *(qui est donc une valeur approchée de* $f(x)$ *à* 10^{-10} *près) et tracer son graphe entre 0,99 et 0,9999(99. . .). Que constate-t-on ?*

EXERCICE 11. *** On considère une suite réelle telle que* $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = \dfrac{n+a}{n+b}u_n$, *avec* $u_0 > 0$, a *et* b *étant des constantes (*$b \notin \mathbb{Z}_-$*).*
a) Montrer que la série $(\sum u_n)$ *converge ssi* $b > a+1$ *(on posera* $v_n = \ln(n^{b-a}u_n)$, *on trouvera un équivalent de* $v_{n+1} - v_n$ *pour en déduire que* $\sum(v_{n+1}-v_n)$ *converge puis que* $u_n = O\big(1/n^{b-a}\big)$*).*
*b) ** Calculer dans ce cas la somme de la série, en repassant aux sommes partielles.*

EXERCICE 12. *Une alternative légale au théorème hors-programme de Césaro : le lemme de l'échelle.*
On considère une suite (u_n) *telle que* $u_n \to \ell > 0$ *; justifier que* $\dfrac{u_0+\ldots+u_n}{n} \to \ell$.

EXERCICE 13. *Nature de* $\sum\limits_{n\geqslant 1}\Big(\big(\sum\limits_{k\geqslant n}\dfrac{1}{k^2}\big)\exp\big(-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\big)\Big)$ *? Utiliser l'exo 23 avec la constante d'Euler.*

EXERCICE 14. *On pose* $u_k = \dfrac{\ln(k+1)-\ln(k)}{k}$, *montrer que* $(\sum u_k)$ *converge.*
On pose alors $r_n = \sum\limits_{k\geqslant n} u_k$. *Montrer que* $u_k \sim \dfrac{1}{k^2} \sim \dfrac{1}{k(k+1)}$ *et en déduire que* $r_n \sim \dfrac{1}{n}$.
** Trouver un équivalent de* $u_k - \dfrac{1}{k(k+1)}$ *et en déduire un développement à deux termes de* r_n *de la forme*

$$r_n = \frac{1}{n} + \frac{b}{n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

** En déduire un équivalent (voire un développement) de* $\sum\limits_{k\geqslant n}\dfrac{\ln k}{k(k+1)}$.

EXERCICE 15. *On pose* $u_{n+1} = \sin u_n$, *avec* $u_0 \in]0,\pi/2[$. *Montrer que* $u_n \sim \sqrt{3/n}$, *indépendamment de* u_0. *(On appliquera le lemme de l'échelle exo 12 à une suite judicieusement déduite de* u_n*. . .)*
Ordinateur : tracer les graphes des fonctions $\sin \circ \sin \circ \ldots \sin$ *et expliquer pourquoi cela tend vers un signal carré.*

EXERCICE 16. *Comparaisons...*

Donner des équivalents en fonction de n *de* $\sum_{k=1}^{n} k^\alpha \quad (\alpha > -1) \qquad \sum_{k \geqslant n} \frac{1}{k^\alpha} \quad (\alpha > 1)$.

Calculer une valeur de n *à partir de laquelle la série harmonique* stationne *sur votre calculatrice (indication : les calculs sont faits en général avec 12 chiffres significatifs).*

EXERCICE 17. *Justifier que* $\forall n \in \mathbb{N} \exists c \in [n, n+1]\ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{2\sqrt{c}}$*, en déduire un encadrement de* $\frac{1}{\sqrt{n}}$ *puis que* $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots \frac{1}{\sqrt{n}} \sim 2\sqrt{n}$.

Retrouver cela par comparaison avec une intégrale (cf. exo 16).

On pose $v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} - \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

Montrer que $v_n \sim -\frac{1}{8n\sqrt{n}}$*, en déduire que* $(\sum_n v_n)$ *converge puis que* $\sum_{n \geqslant N} v_n \sim \sum_{n \geqslant N} -\frac{1}{8n\sqrt{n}}$ *quand* $N \to +\infty$.

Donner un équivalent de ce reste par comparaison avec une intégrale (cf. exo 16) et prouver finalement que

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots \frac{1}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{n} + C^{te} + \frac{1}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

(on ne demande pas d'exprimer la constante en question)

EXERCICE 18. *Montrer que les suites* $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ *et* $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$ *sont adjacentes. En déduire que leur limite commune,* e*, est irrationnelle.*

EXERCICE 19. *Quelques séries plus tordues : discuter la convergence des séries de terme général*

$u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ *équivalent du reste ?* $\quad u_n = \arctan \frac{(-1)^n}{n+1} \quad u_n = (-1)^n \frac{\ln n}{n} \quad u_n = \sin\left(\pi(2+\sqrt{3})^n\right)$

$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$ *(soustraire* $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$*)* $\quad u_n = (-1)^n \sqrt{n}\ \sin \frac{1}{n}$ *(id.)* $\quad u_n = \sin(n!\pi e)$ *(cf. exo 18).*

(penser à Stirling) $\quad u_n = (-1)^n \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \quad u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}} \quad * u_n = \frac{e^{\frac{2ni\pi}{3}}}{n^\alpha}$ *(étudier* $s_{3n+3} - s_{3n}$*)*

EXERCICE 20. *On suppose que la suite* (u_n) *de réels* > 0 *est bornée et vérifie* $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to 1$*. La suite est-elle nécessairement convergente ?*

EXERCICE 21. *On pose pour* $n \geqslant 2$ $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$*. Donner un équivalent simple* v_n *de* u_n*. Est-ce que* $(\sum v_n)$ *converge ? Que peut-on en conclure ? Donner un équivalent de* $u_n - v_n$ *et conclure quant à la nature de* $(\sum u_n)$.

EXERCICE 22. ** (version plus dure) On pose pour* $n \geqslant 2$ $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$*. Nature de* $(\sum u_n)$.

EXERCICE 23. *On pose pour* $n \geqslant 1$ $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$.

Trouver un équivalent de $u_n = s_n - s_{n-1}$*, en déduire la convergence de* s_n *vers une constante* γ*, un équivalent de* $s_n - \gamma$*, un développement asymptotique de* $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

Déduire de cela un développement aymptotique de $1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n+1}$*, retrouver la somme de la série harmonique alternée, en déduire aussi* $\lim \frac{1}{n+1} + \ldots \frac{1}{n+n}$.

EXERCICE 24. *(Calcul de $\zeta(2)$)*

Montrer que $\int_0^\pi (-t+\frac{t^2}{2\pi})\cos nt\,dt = \frac{1}{n^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

En déduire que $s_n = 1+\frac{1}{2^2}+\ldots\frac{1}{n^2}$ *s'écrit* $\frac{\pi^2}{6} - \int_0^\pi h(t)\sin\big((n+\frac{1}{2})t\big)\,dt$ *où* h *est une fonction que l'on explicitera* ***et qui est*** $\mathcal{C}^1$. *Conclure par intégration par parties et majoration.*

EXERCICE 25. ** Montrer que la série* $(\sum \frac{(-1)^{n-1}H_n}{n})$ *converge (où* $H_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$*).*

*** En déduire que le produit de Cauchy de* $(\sum \frac{(-1)^n}{n})$ *par elle-même converge.*

EXERCICE 26. *(Démonstration de la formule de* STIRLING*)*

On pose $u_n = \left(\sum_{k=1}^n \ln k\right) - (n+\frac{1}{2})\ln n + n$.

En étudiant $v_n = u_n - u_{n+1}$, *montrer qu'il existe une constante* A *telle que*

$$n! \sim A\sqrt{n}\, n^n e^{-n}$$

Trouver la valeur de A *grâce aux intégrales de* WALLIS *:*

Les trois exercices suivants sont liés à la formule de WALLIS.

EXERCICE 27. *Trouver une relation de récurrence entre les intégrales* $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t\,dt$ *(entre* I_n *et* I_{n-2}*). En déduire* I_{2n} *en fonction de factorielles et puissances de 2.*
Montrer que I_n *décroît, puis que* $I_n \sim I_{n-1}$ *et enfin que* nI_nI_{n-1} *est une constante.*
En déduire un équivalent de I_n, *et une formule exprimant* π *comme limite d'une suite de rationnels.*

EXERCICE 28. *La suite... c'est une série ! Convergence et si possible (5/2 ?) somme de la série* $\sum(-1)^n I_n$ *?*

EXERCICE 29. *Calculer la limite du produit infini* $\prod_{n\geqslant 1}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)$.

EXERCICE 30. *On note* u_n *la probabilité qu'il y ait* n *piles et* n *faces après* $2n$ *épreuves (de Bernouilli équiprobables). Convergence et limite de* u_n, *convergence de* $(\sum u_n)$ *?*

EXERCICE 31. ***Loi binômiale et loi normale***

L'expérience montre que les coefficients d'une ligne du triangle de Pascal s'organisent selon une courbe en cloche.

Justifier que le "milieu de la ligne", soit $\binom{n}{n/2}$, *est équivalent à* $\frac{2^n}{\sqrt{2\pi n}}$.

On sait que l'étalement d'une loi Binomiale (= l'écart-type) est de l'ordre de $\sqrt{n}$, *ce qui suggère de chercher la limite (éventuelle ?) de* $\sqrt{n}\binom{n}{\frac{n}{2}+x\sqrt{n}}2^{-n}$ *où* x *est une proportion fixée, et* $n \to +\infty$.

** Montrer que cela tend effectivement vers une courbe de Gauss. On négligera le fait que* $\frac{n}{2}+x\sqrt{n}$ *n'est pas forcément entier (une démonstration rigoureuse utilise un arrondi à l'entier le plus proche, ou la formule de Stirling étendue aux réels) et on montrera au passage que*

$$(1 \pm \frac{2x}{\sqrt{n}})^{n/2 \pm x\sqrt{n}} \sim e^{x^2 \pm x\sqrt{n}} \qquad \text{quand } n \to +\infty.$$

EXERCICE 32. *(spécial 5/2)*

Montrer que si $\sqrt[n]{|u_n|} \to \ell < 1$ *alors* $(\sum u_n)$ *est absolument convergente (règle de* CAUCHY*).*
On introduira une suite $v_n = k^n$ *où* $\ell < k < 1$.

EXERCICE 33. ***Les séries de* BERTRAND** *(hors-programme).*

Discuter la convergence des séries $\left(\sum \dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}\right)$, $\alpha, \beta > 0$. *On pourra comparer à une série de* RIEMANN *en général, et à une intégrale dans le cas délicat* ($\alpha = 1$).

EXERCICE 34. *Les séries* $\left(\sum \dfrac{\sin(n\theta)}{n}\right)$, $\left(\sum \dfrac{\cos(n\theta)}{n}\right)$ *convergent pour tout* $\theta \in \mathbb{R}$, *sauf quand* $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$ *évidemment.*

Pour le prouver, poser $n.u_n = e^{ni\theta}$, *définir* $v_n = e^{i\theta}u_n - u_{n+1}$ *et étudier* $\left(\sum |v_n|\right)$ *et exprimer* $v_1 + \ldots + v_n$ *en fonction de* $u_1 + \ldots + u_n$.

Généraliser à $\left(\sum \dfrac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}\right)$.

EXERCICE 35. *Donner un équivalent de* $\sum_{k=n}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k}$ *(regrouper les termes deux par deux, considérer une intégrale).*

EXERCICE 36. * *Calculer la somme de la série alternée* $\left(\sum (-1)^k \dfrac{\ln k}{k}\right)$ *en établissant que*

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln k}{k} = \ln(2)\Big(H(n) - \ln n\Big) + \ln n\Big(\ln(2) - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}\Big) - \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\ln(k/n)}{k/n}$$

EXERCICE 37. *Marche aléatoire*.

On considère un ivrogne qui, à chaque instant, se déplace aléatoirement dans le sens positif ou dans le sens négatif. Ici nous étudions le cas le plus simple : partant de l'origine, un point mobile sur $\mathbb{Z}$ peut à chaque instant (repéré par un entier) aller à gauche ou à droite, i.e. bouger de ± 1, avec probabilité $1/2$. On fixe un nombre n d'étapes : par exemple, la probabilité d'être arrivé à la position n (de même pour $-n$) vaut alors $P(X_n = n) = 2^{-n}$, mais $P(|X_n| > n)$ est nulle.

1°) *Vérifier que la probabilité d'être à la position $2p-n$ est égale à $P(X_n = 2p-n) = 2^{-n}\binom{n}{p}$ (indic : on va p fois dans le sens positif, et $n-p$ fois dans le sens négatif).*

2°) *On cherche* l'espérance *de $|X_n|$ soit $E = \sum_{p\in\mathbb{Z}} |2p-n| P(X_n = 2p-n)$.*

a) *Prouver les relations*

$$\sum_{m=0}^{k-1} \frac{(2k)!}{m!(2k-m)!} = \sum_{m=k+1}^{2k} \frac{(2k)!}{m!(2k-m)!} = \frac{1}{2}\Big(2^{2k} - \frac{(2k)!}{k!k!}\Big)$$

$$\sum_{p=0}^{k} \frac{(2k+1)!}{p!(2k+1-p)!} = \sum_{p=k+1}^{2k+1} \frac{(2k+1)!}{p!(2k+1-p)!} = 2^{2k}$$

b) *On suppose $n = 2k+1$ impair. Montrer que*

$$E = 2^{-n+1} \sum_{p=0}^{\frac{n-1}{2}} (n-2p) \frac{n!}{p!(n-p)!} = 2^{-2k}(2k+1)\Big(\sum_{p=0}^{k} \frac{(2k+1)!}{p!(2k+1-p)!} - 2\sum_{p=1}^{k} \frac{(2k)!}{(p-1)!(2k-(p-1))!}\Big)$$

À l'aide des relations précédentes, puis de la formule de Stirling, en déduire

$$E = 2^{1-2k} \frac{(2k+1)!}{(k!)^2} \sim 2\sqrt{\frac{k}{\pi}} \sim \sqrt{\frac{2n}{\pi}}$$

c) *On suppose $n = 2k$ pair. Par des calculs similaires, montrer qu'on a encore le même équivalent.*

$\boxed{\text{\textit{L'espérance d'une marche aléatoire est donc proportionnelle à la racine carrée du nombre d'étapes.}}}$

(après une dizaine de milliers de pas, l'ivrogne est à une centaine de pas de son point de départ).

Sommabilité, séries doubles

EXERCICE 38. *Une injection de* $[0,1]$ *dans* $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

À tout réel $x \in [0,1]$ *on associe la suite définie par* $S_n(x) = \lfloor (n+1)x \rfloor - \lfloor nx \rfloor$.

a) Montrer que $S_n(x) \in \{0,1\}$ *et que* $\dfrac{S_0 + \dots S_n}{n} \to x$ *quand* $n \to +\infty$. *En déduire que l'application* $x \mapsto (S_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ *est injective.*

b) Montrer que pour $x \in \mathbb{Q}$ *la suite* $S_n(x)$ *est périodique et * réciproquement.*

*c) * Montrer qu'il existe des suites dans* $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ *qui ne sont pas de la forme* $S_n(x)$.

EXERCICE 39. *Soient* $x, y > 0$ *incommensurables (par exemple 1 et* π *ou* $\ln 2$ *et* $\ln 3$*). Montrer que* $A = x\mathbb{N} + y\mathbb{N} = \{ax + by \mid (a,b) \in \mathbb{N}^2\}$ *est dénombrable.*

** Montrer que l'on peut numéroter les élements de* A **par ordre croissant** *:* $A = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_n, \dots\}$ *où* $\alpha_n \leqslant \alpha_{n+1}$ $\forall n$.

*** Montrer que* $\alpha_{n+1} - \alpha_n$ *tend vers 0 quand* $n \to +\infty$.

EXERCICE 40. *Soit* (α_n) *une famille sommable de réels positifs (i.e.* $\sum \alpha_n$ *converge).*

On considère la série de terme général $u_k = k \sum\limits_{n \geqslant k} \dfrac{\alpha_n}{n(n+1)}$.

Montrer que u_k *est bien définie (!), puis que* $\sum u_k$ *converge et calculer sa somme. On pourra découper de deux façons*

$$I = \{(k,n) \in \mathbb{N}^{*2} \mid k \leqslant n\} = \bigcup_{n \geqslant 1} \Big(\Delta_n = \{(k,n) \in \mathbb{N}^{*2} \mid k \leqslant n\} \Big) = \bigcup_{k \geqslant 1} \Big(\Gamma_k = \{(k,n) \in \mathbb{N}^{*2} \mid n \geqslant k\} \Big)$$

c'est à dire sommer d'abord sur n *ou d'abord sur* k *la famille des* $\left(\dfrac{k\alpha_n}{n(n+1)} \right)_{(k,n) \in I}$.

EXERCICE 41. *Étudier la sommabilité des familles suivantes :*

$$\sum_{m,n \geqslant 2} \frac{1}{m^n} \qquad \sum_{m,n} \frac{a^m \, b^n}{(m+n)!} \qquad \sum_{m,n} \frac{(m+n)!}{m! \, n!} x^{m+n}$$ *(essayer de calculer les sommes. . .)*

EXERCICE 42. *Sommabilité de* $\left(\dfrac{1}{n} \right)$ *où* n *est tout nombre qui s'écrit* ***sans*** *le chiffre 9 dans son écriture décimale.*

EXERCICE 43. *Sommabilité et somme éventuelle de* $\left(r^{|n|} e^{ni\theta} \right)_{n \in \mathbb{Z}}$. *Idem pour* $\left(\dfrac{(-1)^p}{q^p} \right)_{p,q \geqslant 2}$.

EXERCICE 44. *Sommabilité de* $\left(e^{-nx} - 2e^{-2nx} \right)_{n \geqslant 1}$ *selon la valeur de* $x \in \mathbb{R}$ *? Calculer la somme de deux façons (pour la deuxième, séparer la famille des* e^{-nx} *selon la parité de* n *et retrouver* $\sum (-1)^{n+1} e^{-nx}$*).*

EXERCICE 45. *Montrer que* $\left(\sum\limits_{n \geqslant 1} n^{-x} \right)^2 = \sum\limits_{n \geqslant 1} d(n) n^{-x}$ *où* $d(n) =$*nombre de diviseurs de* n *et* $x > 1$.

EXERCICE 46. *Soient* $f_0 = f_1 = 1, f_2 = 2, \dots, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \dots$ *les nombres de* FIBONACCI. *Montrer que*

$$\sum_{n \geqslant 0} f_n t^n = \frac{1}{1 - t - t^2} = \sum_{n \geqslant 0} (t + t^2)^n$$ *(pour quelles valeurs de* $t \in \mathbb{R}$ *? de* $t \in \mathbb{C}$ *?)*

et en déduire $f_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \dots$. *Que signifie cela par rapport au triangle de* PASCAL *?*

EXERCICE 47. *Sommabilité, somme de* $\left(\sum_{n\geqslant 1}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^2(n-p)!}\right)$.

** Idem avec* $\left(\sum_{n\geqslant 2}\sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{p^2(n-p)^2}\right)$ *(on admet que* $\zeta(2)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$*).*

EXERCICE 48. *Soit* b *un entier* $\geqslant 2$*, on note* $p(n)$ *le nombre de chiffres de* n *écrit en base* b *(prenez* $b=10$ *si vous préférez). Montrer la sommabilité, et calculer la somme, de la famille* $\left(\frac{p(n)}{n(n+1)}\right)_{n\geqslant 1}$*. On établira au passage que* $\sum_{p\geqslant 1} px^p=\frac{x}{(1-x)^2}$*.*

EXERCICE 49. *Avec* $\zeta(x)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^x}$ *et* $\gamma=\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)$*, montrer les relations*

$$\sum_{n\geqslant 2}\frac{\zeta(n)-1}{n}=1-\gamma \qquad \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n\zeta(n)}{n}=\gamma$$

(pour la dernière on considèrera la famille des $\frac{(-1)^n}{n.k^n}, n\geqslant 2, k\geqslant 2$ *dans un premier temps.)*
On prouvera au passage la relation $\forall x\in]-1,1[\quad \ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$.

EXERCICE 50. *Calculer* $\sum_{a,b\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{a^2b+ab^2+2ab}$.

EXERCICE 51. *Démontrer la relation* $\left(\sum_{k\geqslant 1}\frac{a_k}{k^z}\right)\left(\sum_{m\geqslant 1}\frac{b_m}{m^z}\right)=\sum_{n\geqslant 1}\left(\sum_{d|n}a_d b_{n/d}\right)\Big/n^z$ *quand les familles adéquates sont sommables (par exemple,* (a_n) *et* (b_n) *sont bornées, et* $z>1$*)*

EXERCICE 52. *(d'après Donald* KNUTH*).*

On suppose que l'on a plusieurs suites réelles $(x_n^1)_{n\in\mathbb{N}},(x_n^2)_{n\in\mathbb{N}},\ldots,(x_n^p)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui vérifient les deux conditions suivantes :*

$$x_n^1+x_n^2+\ldots+x_n^p\to p\alpha \qquad (x_n^1)^2+(x_n^2)^2+\ldots+(x_n^p)^2\to p\alpha^2$$

Montrer que pour tout $k=1\ldots p$ *la suite* $(x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* α *(considérer* $\sum_k(x_n^k-\alpha)^2$*).*

EXERCICE 53. *On considère une série de nombres complexes* ***absolument*** *convergente* $\left(\sum u_n\right)$*. Montrer la sommabilité de la famille des* $(u_{i_1}\ldots u_{i_p})$ *avec* $0\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p$ *et* $p\geqslant 0$ *et la convergence du produit infini* $\prod(1+u_n)$*.*

EXERCICE 54. *(Convergence monotone pour les séries)*

On considère une ***suite*** *double* $(u_{n,k})$ *de réels positifs telle que pour tout* k *fixé, la suite* $(u_{n,k})_n$ *converge vers* v_k *en* ***croissant*** *et* $\sum v_k$ *converge.*
Montrer qu'alors pour tout n*,* $\sum_{k\geqslant 0}u_{n,k}$ *converge vers une limite* s_n*, et que*

$$\lim_{n\to+\infty}s_n=\lim_{n\to+\infty}\Big(\sum_{k\geqslant 0}u_{n,k}\Big)=\sum_{k\geqslant 0}v_k$$

(on écrira $u_{n,k}$ *comme somme partielle d'une série à termes positifs. . .)*
Une application (avec une ruse) : convergence et limite de $s_n=\left(\frac{1}{n}\right)^n+\left(\frac{2}{n}\right)^n+\ldots\left(\frac{n}{n}\right)^n$ *?*
Une autre application : (re)démontrer que $(1+\frac{z}{n})^n\to e^z$*.*