14 septembre 2016

Dans la plupart de ces exercices, une simulation par calculatrice ou ordinateur est vivement conseillée pour subodorer le comportement du terme général de la série.

EXERCICE 1. *Pour couper une tarte en 7, comment faire ? Facile : couper en 8, distribuer 7 parts, puis prendre ce qui reste, le couper en 8, etc... Est-ce généralisable à un découpage en 255 parts ?*

EXERCICE 2. *Quelle est la somme effectuée sur*

`http://www.smbc-comics.com/index.php?id=4071`

à votre avis ?

EXERCICE 3. ***Calculer*** *les sommes des séries suivantes via les sommes partielles ($\lfloor n \rfloor$ = partie entière de n) :*

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1} \qquad * \sum_{\substack{n=1\\ n\neq p}}^{+\infty} \frac{1}{n^2-p^2},\ p \in \mathbb{N}^* \qquad \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2n-1}{n^3-4n} \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \quad \textit{(noter que } \tfrac{(-1)^n}{n+1} \textit{ est une intégrale)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

$$\textit{(plus fins)} \sum_{n=1}^{\infty} \arctan\frac{2}{n^2} \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin\frac{1}{n(n+1)}}{\cos\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n+1}} \qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{2^n} \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{\binom{n}{2}}}{n} \qquad \sum_{n\geqslant 0} 2^{-n}\,\mathrm{th}\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

Pour ce dernier on pourra évaluer $\coth x - 2\coth 2x$.

EXERCICE 4. *Encore de la tarte. Vous savez découper n'importe quel morceau de tarte en 2 morceaux égaux et donc aussi en 4,8... Comme vous avez $k = 5$ personnes à nourrir, vous commencez par couper en 8 et distribuer 5 huitièmes. Restent 3 parts, que vous découpez chacune en 2, obtenant 6 seizièmes dont vous distribuez 5, reste un morceau (quelle taille ?) que vous découpez en combien ? Ecrivez la série des portions successives de tarte reçues, expliquer la périodicité observée, calculer sa somme. Généraliser à k quelconque.*

EXERCICE 5. *Calculer* $\sum_{n\geqslant 1} \cos^{n-1}(x)\cos((n+1)x)$.

EXERCICE 6. *Convergence des séries de termes généraux :*

$$u_n = \frac{3}{\sqrt{n}+2^{(-1)^n}} \quad u_n = \sqrt[3]{n^3+an} - \sqrt{n^2+3} \quad \textit{(discuter)} \quad u_n = \frac{2^n\, n!}{n^n} \quad u_n = n^{-\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n})}$$

$$u_n = \frac{\ln(\ln n)}{n^{1{,}0004}} \quad u_n = \left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^\alpha} \quad u_n = (n+\sqrt{\pi})^\alpha - n^\alpha \qquad u_n = \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n} \qquad u_1 = 2042; u_{n+1} = \frac{1}{n}e^{-u_n}$$

$$u_n = \tan(\pi\times(2-\sqrt{3})^n) \qquad u_n = e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad u_n = \mathrm{Arc}\cos\sqrt{1-\frac{1}{n^\alpha}} \qquad u_n = \frac{\ln n}{n}\ln(1+\frac{1}{n})$$

EXERCICE 7. *On considère la série* $\sum \frac{P(n)}{Q(n)}$ *où* P/Q *est une fraction rationnelle.*

Montrer que cette série converge ssi $d^\circ P$ - $d^\circ Q < -1$.

EXERCICE 8. (u_n) *est une suite réelle. On suppose que* $\sum u_n^2$ *est convergente, en déduire par une habile majoration que* $\sum |u_n|/n$ *l'est aussi (*$u_n/n = u_n \times 1/n\dots$*).*

EXERCICE 9. *On pose pour* $x_0 \geqslant 0 \quad x_{n+1} = \sqrt{\dfrac{x_n+1}{2}}$. *Montrer que* $x_n \to 1$.

La série de terme général $u_n = x_n - 1$ *est-elle (absolument) convergente ? (utiliser le critère de* D'ALEMBERT*). * Idem quand* $x_{n+1} = \sqrt{2 - x_n}$.

EXERCICE 10. *** On considère une suite réelle telle que* $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = \dfrac{n+a}{n+b} u_n$, *avec* $u_0 > 0$, a *et* b *étant des constantes (*$b \notin \mathbb{Z}_-$*).*

a) Montrer que la série $(\sum u_n)$ *converge ssi* $b > a+1$ *(on prouvera en étudiant* $\sum (v_{n+1} - v_n)$ *que* $v_n = \ln(n^{b-a} u_n)$ *tend vers une constante).*

*b) ** Calculer dans ce cas la somme de la série.*

EXERCICE 11. *Une alternative légale au thm hors-programme de Césaro : le lemme de l'échelle.*

On considère une suite (u_n) *telle que* $u_n \to \ell > 0$ *; justifier que* $u_0 + \ldots + u_n \sim n.\ell$.

EXERCICE 12. *Nature de* $\sum\limits_{n\geqslant 1} \Big(\big(\sum\limits_{k\geqslant n} \frac{1}{k^2}\big) \exp\big(-\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\big) \Big)$ *? Utiliser l'exo 20.*

EXERCICE 13. *On pose* $u_k = \dfrac{\ln(k+1) - \ln(k)}{k}$, *montrer que* $(\sum u_k)$ *converge. On pose alors* $S_n = \sum\limits_{k\geqslant n} u_k$. *Montrer que* $u_k \sim \dfrac{1}{k^2} \sim \dfrac{1}{k(k+1)}$ *et en déduire que* $S_n \sim \dfrac{1}{n}$.

** Trouver un équivalent de* $u_k - \dfrac{1}{k(k+1)}$ *et en déduire un développement à deux termes de* S_n *de la forme*

$$S_n = \frac{1}{n} + \frac{b}{n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

** En déduire un équivalent (voire un développement) de* $\sum\limits_{k\geqslant n} \dfrac{\ln k}{k(k+1)}$.

EXERCICE 14. *On pose* $u_{n+1} = \sin u_n$, *avec* $u_0 \in]0, \pi/2[$. *Montrer que* $u_n \sim \sqrt{3/n}$, *indépendamment de* u_0. *(On appliquera le lemme de l'échelle exo 11 à une suite judicieusement déduite de* $u_n \dots$*)*

Ordinateur : tracer les graphes des fonctions $\sin \circ \sin \circ \ldots \sin$ *et expliquer pourquoi cela tend vers un signal carré.*

EXERCICE 15. *Comparaisons...*

Donner des équivalents en fonction de n *de* $\sum\limits_{k=1}^{n} k^\alpha \quad (\alpha > -1) \qquad \sum\limits_{k\geqslant n} \dfrac{1}{k^\alpha} \quad (\alpha > 1)$.

Calculer une valeur de n *à partir de laquelle la série harmonique stationne sur votre calculatrice (indication : les calculs sont faits en général avec 12 chiffres significatifs).*

EXERCICE 16. *Montrer que les suites* $u_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}$ *et* $v_n = u_n + \dfrac{1}{n.n!}$ *sont adjacentes. En déduire que leur limite commune,* e, *est irrationnelle.*

EXERCICE 17. *Quelques séries plus tordues : discuter la convergence des séries de terme général*

$u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ *équivalent du reste ?* $u_n = \arctan\frac{(-1)^n}{n+1}$ $u_n = (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ $u_n = \sin\left(\pi(2+\sqrt{3})^n\right)$

$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$ *(soustraire* $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$*)* $u_n = (-1)^n\sqrt{n}\,\sin\frac{1}{n}$ *(id.)* $u_n = \sin(n!\pi e)$ *(cf. exo 16).*

(penser à Stirling) $u_n = (-1)^n \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$ $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$ $* \, u_n = \frac{e^{\frac{2ni\pi}{3}}}{n^\alpha}$ *(étudier* $s_{3n+3} - s_{3n}$*)*

EXERCICE 18. *On pose pour* $n \geqslant 2$ $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$*. Donner un équivalent simple* v_n *de* u_n*. Est-ce que* $(\sum v_n)$ *converge ? Que peut-on en conclure ? Donner un équivalent de* $u_n - v_n$ *et conclure quant à la nature de* $(\sum u_n)$*.*

EXERCICE 19. ** (version plus dure) On pose pour* $n \geqslant 2$ $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$*. Nature de* $(\sum u_n)$*.*

EXERCICE 20. *On pose pour* $n \geqslant 1$ $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$*.*
Trouver un équivalent de $u_n = s_n - s_{n-1}$*, en déduire la convergence de* s_n *vers une constante* γ*, un équivalent de* $s_n - \gamma$*, un développement asymptotique de* $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$*.*
Déduire de cela un développement aymptotique de $1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n+1}$*, retrouver la somme de la série harmonique alternée, en déduire aussi* $\lim \frac{1}{n+1} + \ldots \frac{1}{n+n}$*.*

EXERCICE 21. *(Calcul de* $\zeta(2)$*)*
Montrer que $\int_0^\pi (-t + \frac{t^2}{2\pi}) \cos nt \, dt = \frac{1}{n^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$*.*
En déduire que $s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots \frac{1}{n^2}$ *s'écrit* $\frac{\pi^2}{6} - \int_0^\pi h(t) \sin\left((n + \frac{1}{2})t\right) dt$ *où* h *est une fonction que l'on explicitera* ***et qui est*** $\mathcal{C}^1$*. Conclure par intégration par parties et majoration.*

EXERCICE 22. *(Démonstration de la formule de* STIRLING*)*
On pose $u_n = \left(\sum_{k=1}^n \ln k\right) - (n + \frac{1}{2}) \ln n + n$*.*
En étudiant $v_n = u_n - u_{n+1}$*, montrer qu'il existe une constante* A *telle que*

$$n! \sim A\sqrt{n}\, n^n e^{-n}$$

Trouver la valeur de A *grâce aux intégrales de* WALLIS *:*

Les trois exercices suivants sont liés à la formule de WALLIS.

EXERCICE 23. *Trouver une relation de récurrence entre les intégrales* $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt$ *(entre* I_n *et* I_{n-2}*).*
Montrer que I_n *décroît, et que* $I_n \sim I_{n-1}$*.*
En déduire un équivalent de I_n*, et une formule exprimant* π *comme limite d'une suite de rationnels.*

EXERCICE 24. *La suite... c'est une série ! Convergence et si possible (5/2 ?) somme de la série* $\sum (-1)^n I_n$ *?*

EXERCICE 25. *Calculer la limite du produit infini* $\prod_{n \geqslant 1} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)$*.*

EXERCICE 26. *On note* u_n *la probabilité qu'il y ait* n *piles et* n *faces après* $2n$ *épreuves (de Bernouilli équiprobables). Convergence et limite de* u_n*, convergence de* $(\sum u_n)$ *?*

EXERCICE 27. *Loi binômiale et loi normale*

L'expérience montre que les coefficients d'une ligne du triangle de Pascal s'organisent selon une courbe en cloche. Comme le milieu de la ligne se trouve en $\binom{n}{n/2} \sim \dfrac{2^n}{\sqrt{2\pi n}}$*, et que l'étalement (= l'écart-type) est en* $\sqrt{n}$*, on essaye de calculer la limite (?) de* $\sqrt{2\pi n}\binom{n}{\frac{n}{2}+x\sqrt{n}}2^{-n}$ *où* x *est une proportion fixée, et* $n \to +\infty$*.*
** Montrer que cela tend effectivement vers une courbe de Gauss. On négligera le fait que* $\frac{n}{2}+x\sqrt{n}$ *n'est pas forcément entier (une démonstration rigoureuse utilise un arrondi à l'entier le plus proche).*

EXERCICE 28. *(spécial 5/2)*

Montrer que si $\sqrt[n]{|u_n|} \to \ell < 1$ *alors* $(\sum u_n)$ *est absolument convergente (règle de* CAUCHY*). On introduira une suite* $v_n = k^n$ *où* $\ell < k < 1$*.*

EXERCICE 29. *Les séries de* BERTRAND.

Discuter la convergence des séries $\left(\sum \dfrac{1}{n^a \ln^b n}\right)$, $a, b > 0$*. On pourra comparer à une série de* RIEMANN *en général, et à une intégrale dans le cas délicat* ($a = 1$)*.*

EXERCICE 30. *Les séries* $(\sum \dfrac{\sin(n\theta)}{n}), (\sum \dfrac{\cos(n\theta)}{n})$ *convergent pour tout* $\theta \in \mathbb{R}$*, sauf quand* $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$ *évidemment.*
Pour le prouver, poser $n.u_n = e^{ni\theta}$*, définir* $v_n = e^{i\theta}u_n - u_{n+1}$ *et étudier* $\sum |v_n|$ *ainsi que* $v_1 + \ldots + v_n$*.*
Généraliser à $(\sum \dfrac{\sin(n\theta)}{n^\alpha})$*.*

EXERCICE 31. *Donner un équivalent de* $\sum_{k=n}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k}$ *(regrouper les termes deux par deux, considérer une intégrale).*

EXERCICE 32. ** Calculer la somme de la série alternée* $(\sum (-1)^k \dfrac{\ln k}{k})$ *en établissant que*

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln k}{k} = \ln(2)\Big(H(n) - \ln n\Big) + \ln n\Big(\ln(2) - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}\Big) - \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\ln(k/n)}{k/n}$$

EXERCICE 33. ***Marche aléatoire***. *On considère un ivrogne qui, à chaque instant, se déplace aléatoirement dans le sens positif ou dans le sens négatif. Ici nous étudions le cas le plus simple : partant de l'origine, un point mobile sur $\mathbb{Z}$ peut à chaque instant (repéré par un entier) aller à gauche ou à droite, i.e. bouger de ± 1, avec probabilité $1/2$. On fixe un nombre n d'étapes : par exemple, la probabilité d'être arrivé à la position n (de même pour $-n$) vaut alors $P(X_n = n) = 2^{-n}$, mais $P(|X_n| > n)$ est nulle.*

1°) *Vérifier que la probabilité d'être à la position $2p - n$ est égale à $P(X_n = 2p - n) = 2^{-n}\binom{n}{p}$ (indic : on va p fois dans le sens positif, et $n - p$ fois dans le sens négatif).*

2°) *On écrit* l'espérance *de* $|X_n|$ *soit* $E = \sum\limits_{p\in\mathbb{Z}} |2p - n| P(X_n = 2p - n)$.

a) *Prouver les relations*

$$\sum_{m=0}^{k-1} \frac{(2k)!}{m!(2k-m)!} = \sum_{m=k+1}^{2k} \frac{(2k)!}{m!(2k-m)!} = \frac{1}{2}\left(2^{2k} - \frac{(2k)!}{k!k!}\right)$$

$$\sum_{p=0}^{k} \frac{(2k+1)!}{p!(2k+1-p)!} = \sum_{p=k+1}^{2k+1} \frac{(2k+1)!}{p!(2k+1-p)!} = 2^{2k}$$

b) *On suppose* $n = 2k + 1$ *impair. Montrer que*

$$E = 2^{-n+1} \sum_{p=0}^{\frac{n-1}{2}} (n-2p) \frac{n!}{p!(n-p)!} = 2^{-2k}(2k+1)\left(\sum_{p=0}^{k} \frac{(2k+1)!}{p!(2k+1-p)!} - 2\sum_{p=1}^{k} \frac{(2k)!}{(p-1)!(2k-(p-1))!}\right)$$

À l'aide des relations précédentes, puis de la formule de Stirling, en déduire

$$E = 2^{1-2k} \frac{(2k+1)!}{(k!)^2} \sim 2\sqrt{\frac{k}{\pi}} \sim \sqrt{\frac{2n}{\pi}}$$

c) *On suppose $n = 2k$ pair. Par des calculs similaires, montrer qu'on a encore le même équivalent.*

L'espérance d'une marche aléatoire est donc proportionnelle à la racine carrée du nombre d'étapes.

Sommabilité, séries doubles

EXERCICE 34. *Soient $x, y > 0$ incommensurables (par exemple 1 et π ou $\ln 2$ et $\ln 3$). Montrer que $A = x\mathbb{N} + y\mathbb{N} = \{ax + by \mid (a, b) \in \mathbb{N}^2\}$ est dénombrable.*
** Montrer que l'on peut numéroter les élements de A **par ordre croissant** : $A = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_n, \dots\}$ où $\alpha_n \leqslant \alpha_{n+1}$ $\forall n$.*
*** Montrer que $\alpha_{n+1} - \alpha_n$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$.*

EXERCICE 35. *Soit (α_n) une famille sommable de réels positifs (i.e. $\sum \alpha_n$ converge).*
On considère la série de terme général $u_k = k \sum_{n\geqslant k} \dfrac{\alpha_n}{n(n+1)}$.
Montrer que u_k est bien définie (!), puis que $\sum u_k$ converge et calculer sa somme. On pourra découper de deux façons

$$I = \{(k, n) \in \mathbb{N}^{*2} \mid k \leqslant n\} = \bigcup_{n\geqslant 1} \Big(\Delta_n = \{(k, n) \in \mathbb{N}^{*2} \mid k \leqslant n\}\Big) = \bigcup_{k\geqslant 1} \Big(\Gamma_k = \{(k, n) \in \mathbb{N}^{*2} \mid n \geqslant k\}\Big)$$

c'est à dire sommer d'abord sur n ou d'abord sur k la famille des $\left(\dfrac{k\alpha_n}{n(n+1)}\right)_{(k,n)\in I}$.

EXERCICE 36. *Étudier la sommabilité des familles suivantes :*

$$\sum_{m,n\geqslant 2} \frac{1}{m^n} \qquad \sum_{m,n} \frac{a^m\, b^n}{(m+n)!} \qquad \sum_{m,n} \frac{(m+n)!}{m!\; n!} x^{m+n}$$

(essayer de calculer les sommes. . .)

EXERCICE 37. *Sommabilité de $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ où n est tout nombre qui s'écrit **sans** le chiffre 9 dans son écriture décimale.*

EXERCICE 38. *Sommabilité et somme éventuelle de $\left(r^{|n|}e^{ni\theta}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$. Idem pour $\left(\dfrac{(-1)^p}{q^p}\right)_{p,q\geqslant 2}$.*

EXERCICE 39. *Sommabilité de $\left(e^{-nx} - 2e^{-2nx}\right)_{n\geqslant 1}$ selon la valeur de $x \in \mathbb{R}$? Calculer la somme de deux façons (pour la deuxième, séparer la famille des e^{-nx} selon la parité de n et retrouver $\sum(-1)^{n+1}e^{-nx}$).*

EXERCICE 40. *Montrer que $\left(\sum_{n\geqslant 1} n^{-x}\right)^2 = \sum_{n\geqslant 1} d(n)n^{-x}$ où $d(n) =$nombre de diviseurs de n et $x > 1$.*

EXERCICE 41. *Soient $f_0 = f_1 = 1, f_2 = 2, \dots, f_n = f_{n-1}+f_{n-2}, \dots$ les nombres de* FIBONACCI. *Montrer que*

$$\sum_{n\geqslant 0} f_n t^n = \frac{1}{1-t-t^2} = \sum_{n\geqslant 0} (t+t^2)^n$$

(pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$? de $t \in \mathbb{C}$?)

et en déduire $f_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \dots$. Que signifie cela par rapport au triangle de PASCAL *?*

EXERCICE 42. *Sommabilité, somme de $\left(\sum_{n\geqslant 1} \sum_{p=1}^{n} \dfrac{1}{p^2(n-p)!}\right)$.*
** Idem avec $\left(\sum_{n\geqslant 2} \sum_{p=1}^{n-1} \dfrac{1}{p^2(n-p)^2}\right)$ (on admet que $\zeta(2) = \sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$).*

EXERCICE 43. *Soit b un entier $\geqslant 2$, on note $p(n)$ le nombre de chiffres de n écrit en base b (prenez $b = 10$ si vous préférez). Montrer la sommabilité, et calculer la somme, de la famille $\left(\dfrac{p(n)}{n(n+1)}\right)_{n\geqslant 1}$. On établira au passage que $\sum_{p\geqslant 1} px^p = \dfrac{x}{(1-x)^2}$.*

EXERCICE 44. *Avec* $\zeta(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^x}$ *et* $\gamma = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right)$, *montrer les relations*

$$\sum_{n\geqslant 2}\frac{\zeta(n)-1}{n} = 1-\gamma \qquad \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n\zeta(n)}{n} = \gamma$$

(pour la dernière on considèrera la famille des $\frac{(-1)^n}{n.k^n}, n \geqslant 2, k \geqslant 2$ *dans un premier temps.)*
On prouvera au passage la relation

$$\forall x \in]-1,1[\quad \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

EXERCICE 45. *Calculer* $\sum_{a,b\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{a^2b+ab^2+2ab}$. *Généralisation ?*

EXERCICE 46. *Démontrer la relation*

$$\left(\sum_{k\geqslant 1}\frac{a_k}{k^z}\right)\left(\sum_{m\geqslant 1}\frac{b_m}{m^z}\right) = \sum_{n\geqslant 1}\left(\sum_{d|n} a_d b_{n/d}\right)\Big/ n^z$$

quand les familles adéquates sont sommables (par exemple, (a_n) *et* (b_n) *sont bornées, et* $z > 1$*)*

EXERCICE 47. *(d'après Donald* KNUTH*).*
On suppose que l'on a plusieurs suites réelles $(x_n^1)_{n\in\mathbb{N}}, (x_n^2)_{n\in\mathbb{N}}, \dots, (x_n^p)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui vérifient les deux conditions suivantes :*

$$x_n^1 + x_n^2 + \ldots + x_n^p \to p\alpha \qquad (x_n^1)^2 + (x_n^2)^2 + \ldots + (x_n^p)^2 \to p\alpha^2$$

Montrer que pour tout $k = 1\ldots p$ *la suite* $(x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* α *(considérer* $\sum_k (x_n^k - \alpha)^2$*).*

EXERCICE 48. *On considère une série de nombres complexes* ***absolument*** *convergente* $\left(\sum u_n\right)$.
Montrer la sommabilité de la famille des $(u_{i_1}\ldots u_{i_p})$ *avec* $0 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_p$ *et* $p \geqslant 0$ *et la convergence du produit infini* $\prod(1+u_n)$.

EXERCICE 49. *(Convergence monotone pour les séries)*

On considère une ***suite*** *double* $(u_{n,k})$ *de réels positifs telle que pour tout* k *fixé, la suite* $(u_{n,k})_n$ *converge vers* v_k *en* ***croissant*** *et* $\sum v_k$ *converge.*
Montrer qu'alors pour tout n, $\sum_{k\geqslant 0} u_{n,k}$ *converge vers une limite* s_n, *et que*

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty}\Big(\sum_{k\geqslant 0} u_{n,k}\Big) = \sum_{k\geqslant 0} v_k$$

(on écrira $u_{n,k}$ *comme somme partielle d'une série à termes positifs. . .)*
Une application (avec une ruse) : convergence et limite de $s_n = \left(\frac{1}{n}\right)^n + \left(\frac{2}{n}\right)^n + \ldots \left(\frac{n}{n}\right)^n$ *?*
Une autre application : (re)démontrer que $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n \to e^z$.