EXERCICE 1. *Que pensez vous de la citation suivante de* CAUCHY *dans son* Cours d'analyse infinitésimale, *où il a défini une série simplement convergente de fonctions : le TG est* $u_n, s_n = x \mapsto \sum_{k=0}^{n} u_k(x), r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x), s = r_n + s_n$.
"Considérons les accroissements que reçoivent ces trois fonctions lorsqu'on fait croître x d'une quantité petite alpha. L'accroissement de s_n sera, pour toutes les valeurs possibles de n, une quantité infiniment petite ; et celui de r_n deviendra insensible en même temps que r_n, si l'on attribue à n une valeur considérable. Par suite, l'accroissement de la fonction s ne pourra être qu'une quantité infiniment petite" ?

EXERCICE 2. *Étudier la convergence (simple, uniforme sur X. . .) des suites (f_n) suivantes :*

$$f_n(x) = \frac{\sin^2 nx}{n \sin x} \qquad f_n(x) = \frac{x}{n(1+x^{2n})} \qquad f_n(x) = \frac{\sin nx}{n\sqrt{x}} \quad \text{(pour } x > 0\text{)} \qquad f_n(x) = nx^n \ln x \quad (x \in [0,1])$$

$$f_n(x) = n\cos^n x \sin x \qquad f_n(x) = x^2 e^{-\sin(x/n)} \qquad f_n(x) = \cos\frac{nx}{n+1} \qquad f_n(x) = n^2x(1-x)^n \text{ sur }]0,2[$$

$$f_n(x) = \int_0^x g(t^n)\,dt \quad g \text{ étant continue sur } [0,1] \qquad f_n(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p x^{p+1}}{p+1} - \ln(1+x) \quad (x \in [0,1])$$

EXERCICE 3. *On pose* $f_n(x) = n\left(\arctan(x+\frac{1}{n}) - \arctan(x-\frac{1}{n})\right)$. *Étudier convergence simple et uniforme de la suite (f_n) sur $\mathbb{R}$ (la formule de Taylor-Lagange pourra servir).*

EXERCICE 4. $f_n : x \mapsto \dfrac{n(x^2-4)}{1+n(x+2)}$. *Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n)*
1°) sur $[0,2]$ 2°) sur $[-2,2]$.

EXERCICE 5. ** Montrer la convergence uniforme sur toute partie bornée de $\mathbb{C}$ de $f_n(x) = (1+\dfrac{z}{n})^n$.*
Pour cela, on commencera par la convergence simple quand $z \in \mathbb{R}$; puis on développera l'expression sous la forme $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} z^k$ et on observera que

$$a_{n,k} \nearrow \frac{1}{k!} \quad \text{quand } n \to +\infty, k \text{ fixé}$$

EXERCICE 6. ** On définit par récurrence la suite de polynômes suivante :*

$$P_0 = 0; \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0,1] \quad P_{n+1}(x) = P_n(x) + \left(x - P_n^2(x)\right)/2$$

Étudier la récurrence $u_{n+1} = g_x(u_n)$ où $g_x(t) = t + \dfrac{x-t^2}{2}$ et $u_0 = 0$. (on montrera en majorant la dérivée de g_x sur $[u_1, 1]$ que $|u_n - \sqrt{x}| \leqslant (\sqrt{x}-0)(1-\dfrac{x}{2})^{n-1}$) et conclure en la convergence uniforme de la suite (P_n) sur $[0,1]$.
On en déduit successivement que la fonction $x \mapsto |x|$, les fonctions affines par morceaux, toutes les fonctions continues, sont limites uniformes de polynômes sur un segment : ce qui démontre le théorème de WEIERSTRASS. *On verra une autre preuve en probas, utilisant l'inégalité de* BIENAYMÉ-CEBYCHEV. *Cf. aussi les exercices 9 et 10.*

EXERCICE 7. Pourquoi « norme infinie » ?

On rappelle ou on admet que $x = (x_1 \dots x_n) \mapsto \left(|x_1|^p + \dots |x_n|^p\right)^{1/p}$ *est une norme sur* $\mathbb{R}^n$, *notée* $\|x\|_p$.

Montrer que $\|x\|_p \to \|x\|_\infty$ *quand* $p \to +\infty$.

** Même question avec la norme* $f \mapsto \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p}$ *sur l'espace* $\mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})$. On pourra montrer qu'il existe un intervalle de la forme $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ sur lequel on a $|f| \geqslant \|f\|_\infty - \varepsilon$.

EXERCICE 8. *On considère une suite de polynômes* P_n *qui converge* **uniformément** *sur* $\mathbb{R}$ *; montrer que sa limite est un polynôme et qu'à partir d'un certain rang, seul change le terme constant (sic ! càd le terme de degré nul) du polynôme* P_n.

EXERCICE 9. ** On considère une suite* (f_n) *de fonctions continues toutes croissantes, qui converge simplement sur* $[0,1]$ *vers une fonction* f, *continue elle aussi. Montrer que la convergence est uniforme. Indication : pour* $\varepsilon > 0$ *donné, montrer l'existence d'une subdivision* $a = a_0 < a_1 < \dots a_n = b$ *telle que* $\forall i = 1 \dots n, f(a_i) - f(a_{i-1}) \leqslant \varepsilon$. *Puis encadrer* $f_n(x) - f(x)$ *pour* $x \in [a_{i-1}, a_i]$ *et conclure.*

EXERCICE 10.

** On considère une suite* (f_n) *de fonctions continues qui converge simplement sur* $[0,1]$ *vers une fonction* f, *continue elle aussi. On suppose la* **suite de fonctions** *croissante, i.e.* $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \leqslant f_{n+1}$. *Montrer que la convergence est uniforme.* On pourra définir une suite (x_n) dans $[0,1]$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \|f - f_n\|_\infty = |f(x_n) - f_n(x_n)|$ et extraire de cette suite une sous-suite convergente par B-W.

EXERCICE 11. *On pose* $f_n(x) = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\dots\cos\frac{x}{2^n}$. *Montrer qu'il y a convergence simple, puis uniforme sur tout segment fixé, et enfin qu'il n'y a* **pas** *convergence uniforme sur* $\mathbb{R}$ *de la suite* (f_n). *On pourra utiliser un encadrement judicieux de la fonction sinus.*

EXERCICE 12. *On considère une suite d'applications* (f_n) *uniformément convergente de* I *dans* $\mathbb{R}$ *; soit* g *une application continue de* $\mathbb{R}$ *dans lui-même ; est-ce que la suite* $(g \circ f_n)$ *est aussi uniformément convergente ?*

EXERCICE 13. *Convergences (simples, uniforme, normale — mais où ?) des* ***séries*** *de termes généraux* $u_n(x)$ *où :*

$$u_n(x) = \frac{nx^2}{x^2+n^3} \qquad u_n(x) = \frac{(-1)^n x}{x^2+n^2} \qquad u_n(x) = \sin\frac{x}{n^2} - \frac{x}{n^2}\cos x \qquad * \, u_n(x) = \frac{(-1)^n}{nx + (-1)^n}$$

$$u_n(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \quad \mathcal{C}^\infty ? \qquad \textit{Convergence et somme de } \sum \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} ?$$

$$u_n(x) = \frac{x}{1+a^{2n}x^2} \qquad u_n(x) = \frac{x\,e^{-nx}}{\ln n}\ (n \geqslant 2) \qquad u_n(x) = e^{-x\sqrt{n}} \textit{(équivalent de la somme en } 0^+ \textit{ ?)}$$

EXERCICE 14. *Comment, et vers quoi, converge la suite (resp. la série) de terme général* $x^n e^{-x}/n!$ *sur* $\mathbb{R}_+$ *?*

EXERCICE 15. ** On considère la suite de terme général* $u_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ *et la série* $\sum(u_n - u_{n+1})$.

Étudier la convergence de la suite, puis de cette série et enfin l'intégration terme à terme (de 0 à x*).*

EXERCICE 16. ** On pose pour* $a < b$ *et* $f_0 \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ $\forall x \in [a,b]$ $f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n$. *Convergence, somme de* $(\sum f_n)$ *?*

EXERCICE 17. — f_n *est nulle en dehors de* $[2^{-n-1}, 2^{-n}]$.

— f_n *est affine sur les deux moitiés de cet intervalle.*

— $f_n(3.2^{-n-2}) = 1/(n+1)$.

— f_n *est continue.*

Représenter f_n, *puis* $f_0 + f_1 + f_2 + f_3$. *Que dire de la convergence de* $\sum f_n$ *?*

EXERCICE 18. *Un théorème utile : montrer que si la suite de fonctions* **à valeurs positives** *(*$u_n(x)$*) est décroissante sur* I *(c'est à dire que pour tout* $x \in I$ *, la suite numérique (*$u_n(x)$*) est décroissante) et si de plus (*u_n*) tend vers la fonction nulle* **uniformément sur** I, *alors la série* $\sum(-1)^n u_n(x)$ *est uniformément convergente sur* I.

En déduire par exemple la continuité de $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{x+n}$ *pour* $x > 0$, *et le droit de l'intégrer terme à terme.*

EXERCICE 19. ** Prouver que la suite de fonctions définie par*

$$f_n(x) = \prod_{k=0}^{n} (1 - q^k x)$$

où q *est un complexe de module* < 1, *tend vers une fonction* f *continue sur* $\mathbb{C}$ *(on pourra introduire la série de TG* $f_n - f_{n-1}$, *et aussi prouver qu'il existe une constante* M *qui majore tous les* $\sup\limits_{[-\alpha,\alpha]} |f_n|$*), la seule solution continue de l'équation fonctionnelle* $f(x) = (1-x)f(qx)$.

EXERCICE 20. *On définit sur [0,1]* $u_n(x) = x^n \ln x$ *(avec* $u_n(0) = 0$*).*

Étudier la convergence uniforme des séries $\sum(-1)^n u_n(x)$ *et* $\sum u_n(x)$.

En déduire la valeur de $\int_0^1 \dfrac{\ln t}{1+t}\,dt$.

** Montrer qu'on a malgré l'absence de convergence uniforme* $\int_0^1 \dfrac{\ln t}{t-1}\,dt = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} \left(= \dfrac{\pi^2}{6}\right)$.

EXERCICE 21. *Convergence de* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-\lambda_n x}$ *où la suite des* $(\lambda_n) > 0$ *est strictement croissante et tend vers* $+\infty$ *?*

Où la somme $f(x)$ *de cette série est-elle continue ? Prouver que l'on peut intégrer terme à terme sur* $\mathbb{R}_+$ *en calculant* $\int_0^{+\infty} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-\lambda_n x}$. *Que trouve-t-on pour* $\lambda_n = n+1$ *?*

EXERCICE 22. *Montrer l'égalité* $\zeta(3) = \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^3} = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t\ \ln(1-t)}{t}\,dt$.

EXERCICE 23. *À l'aide du théorème de* WEIERSTRASS, *montrer que si une fonction continue* f *vérifie* $\forall\, k \in \mathbb{N}\quad \int_0^1 f(t)\, t^k\, dt = 0$ *alors* f *est nulle sur* $[0,1]$ *(thm des moments).*

On observera pour commencer que, pour tout polynôme P, $\int_0^1 f(t)\, P(t)\, dt = 0$.

EXERCICE 24. *Montrer que pour toute fonction continue* f *sur* $[0,1]$ *on a*

$$\int_0^1 (n+1)t^n f(t)\, dt \to f(1) \qquad \text{quand } n \to +\infty$$

On commencera par calculer cette limite quand f *est un polynôme, puis on résoudra le cas général à l'aide du théorème de* WEIERSTRASS,

EXERCICE 25. Une double limite

Limite quand $x \to +\infty$ *de* $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n^2+x^2}$ *? Essayez aussi de le démontrer « à la main ».*

EXERCICE 26. *Limite de* $\int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^2+\dots t^{n-1}}$ *? Le problème est bien sûr de la* **p***rouver, pas de la* **t***rouver...*

EXERCICE 27. *Définition, continuité et dérivabilité de la somme de la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$.

EXERCICE 28. *Domaine de définition et ** étude sur son domaine et aux bornes de la somme de la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1-e^{-nx})$.

EXERCICE 29. *On pose pour* $s > 1 \quad \zeta(s) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^s}$.

Montrer que ζ *est* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]1, +\infty[$ *et calculer ses dérivées* $k^{\text{ièmes}}$. *En déduire notamment que* ζ *est décroissante et convexe.*

Étudier de même la fonction $\mu : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$. *Rapport entre* μ *et* ζ *? Cela permet de prolonger* ζ *pour* $0 < x < 1$.

***** Montrer que si* $s \notin \mathbb{R}, \zeta(s) = 0$ *et* $\mathrm{Re}(s) > 0$*, alors* $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$.

EXERCICE 30. *On pose* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$. *Montrer que* f *est de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}_+^*$. *Donner la limite en* $+\infty$ *de* $f(x)$*, puis montrer la relation* $f(x) + f(x+1) = 1/x$ *et en déduire le comportement de* f *au voisinage de 0 et de* $+\infty$. *Donnez un équivalent en* $+\infty$ *de* $f(x)$ *dans l'échelle des puissances (positives ou non) de* x.

Pour conclure, on pourra chercher à écrire f *sous forme d'une intégrale dépendant d'un paramètre (*f *est liée à la fonction* ***Digamma****, dérivée logarithmique de la fonction Gamma).*

EXERCICE 31. ** On commence par démontrer un Lemme :*

LEMME 1. *Si la suite de terme général* $u_n > 0$ *vérifie* $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O(\frac{1}{n^2})$ *alors il existe un* $\lambda > 0$ *tel que* $u_n \sim \frac{\lambda}{n^\alpha}$ *(on posera* $b_n = \ln(n^\alpha u_n), b_{n+1} - b_n = a_n$*).*

** Ensuite, montrer que l'on définit une fonction* f *sur* $]-1, 0[$ *par* $x \mapsto \int_0^1 \frac{1-(1-t)^x}{t}\,dt$ *et que l'on a* $f(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1} x(x-1)\dots(x-n+1)}{n.n!}$ *(Utiliser le développement de* $(1-t)^x$*).*

EXERCICE 32. *On définit* $u_n(x) = (-1)^n \sin(\sin(\dots\sin(x)\dots))$. *Étudier la convergence simple de* $(u_n(x))$*, puis la CV de* $(\sum u_n)$ *sur* $\mathbb{R}$ *?*

EXERCICE 33. *Donner un équivalent quand* $x \to 1$ *de* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$. *(Poser* $x = e^{-t^2}$ *et comparer à une intégrale). Généraliser à* x^{n^α}.

EXERCICE 34. *On fixe* $|x| < 1$ *et on pose* $S(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{1 - x\cos t}$.

Par un développement en série, montrer que $S(x) = \sum_{n\geqslant 0} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n}}{4^n}$.

Montrer qu'en fait $S(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *(on observera que* $S(x) = S(-x) = \frac{1}{2}(S(x)+S(-x)) = \dots$ *et on posera* $u = \tan t$*). En déduire par exemple un développement en série de* $\mathrm{Arc}\sin x$ *!*

EXERCICE 35. *** Un petit tour dans les algèbres de* LIE

Préliminaire. Étudier la convergence de $\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n$ *pour* $z \in \mathbb{R}_+$, *puis* $z \in \mathbb{C}$ *(avec* $|z| \leqslant M$ *dans les deux cas). On écrira*

$$\exp(z) - \left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} z^k + \sum_{k>n} \frac{z^k}{k!}$$

On se place dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *On pose* $f_p(A) = (I + \frac{1}{p}A)^p$.

a) Montrer que la suite (f_p) *converge vers l'application exponentielle, et ce uniformément sur tout compact (prendre* $\|A^p\| \leqslant \|A\|^p$*).*

b) Soient $A, B \in E$, *montrer que quand* $p \to +\infty$ *:*

$$\left(\exp\left(\frac{A}{p}\right)\exp\left(\frac{B}{p}\right)\right)^p \to \exp(A+B) \qquad \left(\exp\left(\frac{A}{p}\right)\exp\left(\frac{B}{p}\right)\exp\left(-\frac{A}{p}\right)\exp\left(-\frac{B}{p}\right)\right)^{p^2} \to \exp(AB-BA)$$

(Faire un DL de l'application exp)

c) Soit $\mathcal{G}$ *un sous-groupe fermé de* $\mathcal{G}\ell_n(\mathbb{C})$, *on note* $\mathcal{A} = \{M \in E \mid \forall t \in \mathbb{R} \quad \exp(tM) \in \mathcal{G}\}$. *Montrer que* $\mathcal{A}$ *est un sev de* E, *mais aussi une (sous-)algèbre avec la loi de composition interne (crochet de Lie, on ne demande pas de vérifier que c'est un produit, associatif, si si)* $[A, B] = AB - BA$.