EXERCICE 1. *Soit (u_n) une suite telle que les trois sous-suites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent. Que fait (u_n) ?*

EXERCICE 2. ⋆ *Trouver une CNS pour que la suite réelle vérifiant $u_{n+1} = 2u_n^2 - 1$ reste bornée. Montrer qu'il existe une infinité de valeurs de u_0 pour lesquelles (u_n) est périodique.*

EXERCICE 3. † ⋆ *On considère une suite (u_n) convergente. Montrer que la suite des moyennes (v_n) définie par $v_n = \dfrac{u_0 + u_1 + \dots u_n}{n+1}$ converge vers la même limite.*

EXERCICE 4. † *On considère la suite définie par $u_0 \in]0, \pi[$ et $u_{n+1} = \sin u_n$. Montrer que (u_n) décroît vers 0.*
Trouver une valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que la suite v_n définie par $v_n = u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ converge vers une limite non nulle. En déduire (appliquez l'exercice précédent à la suite v_n) un équivalent de u_n.

EXERCICE 5. *On a n taupins dans une MP. On fait n tirages au sort avec remise, chaque taupin(e) sélectionné au moins une fois prend un 0 en DS. Quelle est la probabilité pour chacun d'être choisi ? Sa limite quand $n \to \infty$? Un équivalent du nombre total de victimes ?*

EXERCICE 6. *Existe-t-il une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $P(X = n)$ soit inversement proportionnelle à n ?*

EXERCICE 7. *On tire à pile ou face entre les deux racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, de manière équiprobable. Espérance, variance, écart-type ? (on suppose $b^2 > 4ac$)*

EXERCICE 8. ⋆ *Étudier la suite complexe définie par $z_{n+1} = (z_n + |z_n|)/2$ (dessiner !). On pourra considérer module et argument et calculer la limite du produit $\cos t/2 \times \cos t/4 \times \dots \cos t/2^n$, en le multipliant par un sinus bien choisi.*

EXERCICE 9. *Suite de* FIBONACCI.
† *On pose $f_1 = f_2 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Montrer que $r_n = f_{n+1}/f_n$ tend vers $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.*

EXERCICE 10. *Les vaches de* NARAYANA.
Au XIVe siècle, Narayana a posé le problème suivant : une vache donne un veau chaque année, puis ce veau devient vache après 3 ans. Le nombre de vaches va suivre la loi $v_n = v_{n-1} + v_{n-3}$ avec la séquence 1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, 41, 60, 88, 129, 189. . . . Montrer que $v_{n+1}/v_n \to 1.465571231876768\dots$ et écouter la pièce de Tom Johnson `youtube.com/watch?v=6yXQinqLmqc`.

EXERCICE 11. *On pose*

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n\theta}{5 + 4\cos\theta}\, d\theta$$

Former $I_{n+2} + I_n$, en déduire I_n grâce à une relation de récurrence linéaire (rem : la suite est bornée !).

EXERCICE 12. *Conjecturer à la calculatrice le comportement de $u_{n+1} = \dfrac{e^{-u_n}}{n+1}, u_0 > 0$, puis le démontrer.*

EXERCICE 13.

$$a_0 = \frac{11}{2} \quad a_1 = \frac{61}{11} \qquad a_{n+1} = 111 - \frac{1130}{a_n} + \frac{3000}{a_{n-1}a_n}$$

Programmer cette suite dans votre calculatrice. Quel est son comportement apparent ? Quelles sont les limites théoriquement possibles ? Montrer que la suite converge vers 6 et non vers 100 ! ! ! !

EXERCICE 14. *Regarder à la calculatrice ou à la main le comportement des suites*

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{2n} \quad \textit{et} \quad v_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots \frac{1}{2n},$$

énoncer une conjecture, puis la démontrer.
Question subsidiaire : limite ?

EXERCICE 15. *La somme d'une progression géométrique s'exprime aussi grâce à une suite géométrique ; la suite de Fibonacci est combinaison de suites géométriques (cf. Exo* **??***). Que penser alors de la somme de ses premiers termes ?*
Énoncer une conjecture sur $f_0 + f_1 + \ldots + f_n = 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + \ldots f_n$*, et la démontrer.*

Un peu de trigo

EXERCICE 16. *1°)* ***convolution discrète****.*
On considère l'espace E *des fonctions de* $\mathbb{Z}$ *dans* $\mathbb{C}$*,* $n-$*périodiques (on a donc* $f(x+n) = f(x), \forall (f,x) \in E \times \mathbb{Z}$*). On définit une loi sur* E *par*

$$f \star g : x \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} f(k) g(x-k)$$

Vérifier que cette loi est interne $(f \star g \in E)$*, commutative, associative, distributive par rapport à l'addition. On pourra se donner un petit lemme pratique : pour* $f \in E$*, la quantité* $\sum_{k=\alpha}^{\alpha+n-1} f(k)$ *est indépendante de* α*.*
2°) ***Transformée de Fourier discrète****.*
On définit la transformée de Fourier *de* f *par* $\widehat{f}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k) e^{-2i\pi kx/n}$*. On a* $\widehat{f} \in E$*.*
a) Exprimer en fonction de $\widehat{f}$ *la transformée de Fourier* $\widehat{f_p}$ *de* $f_p : x \mapsto f(x+p)$*.*
b) On définit aussi $\widetilde{f} : x \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} f(k) e^{+2i\pi kx/n}$*. Calculer* $\widetilde{\widehat{f}}$ *en fonction de* f*.*
c) Enfin vérifier que la transformée de Fourier de $f \star g$ *est le produit de leurs transformées de Fourier :* $\widehat{f \star g} = \widehat{f} \times \widehat{g}$*.*

EXERCICE 17. *(Parfois on a besoin d'une petite formule. . .)*

d *est un diviseur de l'entier* n*. Montrer que*

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi d k}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi k}{n}\right)} = d(n-d).$$

EXERCICE 18. ***Séries de Fourier***

M. Monnet a introduit la décomposition d'un signal (disons) 2π-périodique f en sa **série de Fourier**

$$S : x \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geqslant 1} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \qquad \textit{où} \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt, b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt.$$

Est-il vrai que cette décomposition reconstitue le signal, i.e. que la série converge vers le signal initial ? Sans vraiment répondre à cette question (complexe !) nous allons la regarder de plus près.

On pose $S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$, *la somme partielle.*

a) *Montrer que*

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\Big(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(t-x)\Big)\,dt$$

b) *Montrer que pour toute fonction continue g, supposée 2π-périodique, la quantité $\int_m^{m+2\pi} g$ est indépendante de m [introduire une primitive de g]. Ce résultat est même vrai pour des fonctions continues par morceaux seulement et des classes plus larges de fonctions. Il permet de prouver que l'intégrale précédente peut être prise sur tout intervalle de largeur 2π – on vous recommande $m = x - \pi$.*

c) Noyau de Dirichlet

Montrer que $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k\theta = \frac{\sin(2n+1)\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}$. *On notera cette expression (fameuse !)* $\Delta_n(\theta)$.

d) *En déduire*

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \Delta_n(t)\big[f(x+t) + f(x-t)\big]\,dt$$

Intuitivement c'est clair : le crochet $[f(x+t) + f(x-t)]$ est proche de $2f(x)$ quand t est voisin de 0, pour peu que f soit continue (que se passe-t-il quand $t \to 0$ si f est seulement continue par morceaux en x ?).

e) *Vérifier que* $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \Delta_n(t)\,dt = 1$ *(peut se faire sans calculs !). En déduire que*

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \Delta_n(t)[g_x(t) + g_x(-t)]\,dt$$

où l'on a posé $g_x(t) = f(x+t) - f(x)$.

Il n'y a plus qu'à montrer que cette dernière intégrale tend vers 0… ce qui est

- **FAUX** *dans l'absolu ! (il existe des contre-exemples)*
- *vrai « presque partout » pour « la plupart »des fonctions (théorème de Carelman, très dur).*
- *prouvable avec des hypothèses de régularité supplémentaires, ce que nous allons faire*

f) *On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que $\frac{g_x(t)}{t}$ se prolonge par continuité en 0. En déduire que*

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} h(t)\sin((n+\frac{1}{2})t)\,dt \qquad \textit{où } h \textit{ est une fonction continue, voire plus.}$$

g) *En supposant h de classe $\mathcal{C}^1$ montrer que cette quantité tend vers 0 quand $n \to +\infty$ [c'est vrai avec des hypothèses plus faibles]. On a établi que la série de Fourier* peut converger *vers le signal initial, mais que ça n'a rien d'évident !*

h) Une autre approche

Montrer que la famille $(1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots \cos nx, \sin nx,)$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle\, f \mid g\,\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} fg$ sur l'espace des fonctions continues 2π-périodiques et en déduire que S_n est la projection orthogonale de f sur un sous-espace vectoriel que l'on précisera.