E désignera un espace vectoriel normé.

Normes, distances

EXERCICE 1. *Quelques normes.*

a) Montrer que $(x,y) \mapsto \operatorname*{Sup}_{t\in[0,1]} |x+ty|$ *définit une norme de* $\mathbb{R}^2$ *et tracer sa boule unité.*

Comparer à la norme euclidienne.

b) Idem avec $\int_0^1 |x+ty|\,dt$ *(calculer en fn de* x, y *en discutant).*

c) (diff) Idem avec $\operatorname*{Sup}_{t\in\mathbb{R}} \dfrac{|x+ty|}{1+t^2}$.

d) Idem avec $\sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2\,dt}$ *sur* $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$.

e) Idem avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \sqrt{x^2+xy+y^2}$.

EXERCICE 2. Normes de matrices

On dit qu'une norme sur l'algèbre $(E,+,.,\times)$ *est* **sous-additive** *si elle vérifie*

$$\forall x, y \in E \quad \|x \times y\| \leqslant \|x\|\,\|y\|.$$

Lesquelles des applications suivantes sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *sont des normes sous-additives ?*

$$\|A\|_\infty = \text{Max}\,|a_{i,j}| \qquad \|A\|_1 = \operatorname*{Max}_i \sum_j |a_{i,j}| \qquad \|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j} a_{i,j}^2}$$

(cette question utilise l'équivalence des normes en dim finie) *Montrer que toute norme sur* E *vérifie*

$$\exists \alpha > 0 \quad \forall A, B \in E\ \|A \times B\| \leqslant \alpha \|A\|\,\|B\|.$$

EXERCICE 3. *Montrer que toute partie bornée non vide admet un* **diamètre**, *au sens de :*

$$\delta(X) = \operatorname*{Sup}_{x,y\in X} \|x-y\|$$

Montrer que le diamètre de la terre vaut 20 000 km. Mais si !

EXERCICE 4. Un calcul de diamètre *(définition dans l'exercice 3).*

Dans le plan euclidien on trace un triangle de REULEAUX *de la façon suivante : d'un point A on trace un arc de cercle d'angle 60°, d'extrémités B et C. Puis on trace l'arc de cercle de centre B d'extrémités A et C et de même pour le dernier côté. Montrer que tout point de la figure convexe obtenue est l'extrémité d'un diamètre. Voir sur Internet les applications au moteur à trois temps.*

EXERCICE 5. *Étudier expérimentalement mais soigneusement le nombre de valeurs d'adhérences de la suite* $x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2, x_0 = 0$ *pour diverses valeurs de* $\lambda \in [0,2]$.

EXERCICE 6. † *Soit* E *un espace préhilbertien (= muni d'un produit scalaire). Montrer que* $\|x\| = \operatorname*{Sup}_{\|y\|\leqslant 1} |(x \mid y)|$.

EXERCICE 7. *Calculer* $d(A,\mathbb{Z}) = \text{Inf}\,|n-a|$ *quand* $n \in \mathbb{Z}, a \in A = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k,\ k \in \mathbb{N}^*$ *(indic : penser à la quantité conjuguée. . .)*

EXERCICE 8. *Montrer que* $d(x,S)=0$ *quand* $x\in[-1,1]$, $S=\{\sin(\sqrt{n})\mid n\in\mathbb{N}\}$ *(indic :* $x=\sin\Big(\sqrt{(\operatorname{Arc}\sin x+2k\pi)^2}\Big)$.
Faire un programme python pour tracer le graphe de la suite des $(\sin\sqrt{n})_n$.

EXERCICE 9. *On considère* E = *ensemble des suites bornées, avec la norme* $\|\ \|_\infty$. *Soit* F *le sous-espace vectoriel des suites qui tendent vers 0,* $\mathbf{u}$ *la suite constante égale à 1. Calculer* $d(\mathbf{u},F)=\operatorname*{Inf}_{\mathbf{f}\in F}\|\mathbf{u}-\mathbf{f}\|$.
Cette distance est-elle atteinte ? En quels points ?
Même question avec la suite $((-1)^n)_n$ *et le sev des suites convergentes.*
Indic : on peut noter $({}^p u)$ *une suite* **de suites** *(d'éléments de* E*) dont le* $p^{\text{ème}}$ *terme est la suite (de nombres)* ${}^p u=({}^p u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de terme général* ${}^p u_n$.

EXERCICE 10.
a) Comparer $\|\ \|_\infty$ *et* $N : f\mapsto|f(0)|+\int_0^1|f'(t)|\,dt$ *sur* $E=\mathcal{C}^1([0,1];\mathbb{R})$. *On pourra notamment appliquer ces deux normes à la suite* $f_n=t\mapsto t^n(1-t)$.
Que pouvez-vous en conclure sur les relations entre l'économie réelle et la spéculation sur les produits dérivés ?
b) On définit sur $E=C^\infty([0,1],\mathbb{R})$ *les normes* $N_1,N_2,\dots$, *par :*
$N_1(f)=|f(0)|+\|f'\|_\infty$, $N_2(f)=|f(0)|+|f'(0)|+\|f''\|_\infty,\dots$. *Les comparer.*
c) Comparer sur $E\times F$ *les trois normes*

$$\|(x,y)\|_\infty=\operatorname{Max}(\|x\|,\|y\|)\qquad\|(x,y)\|_1=\|x\|+\|y\|\qquad\|(x,y)\|_2=\sqrt{\|x\|^2+\|y\|^2}$$

EXERCICE 11. *On considère la suite des applications* $t\mapsto\cos(nt), n\in\mathbb{N}$, *dans l'espace préhilbertien des applications continues 2π–périodiques de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, *muni du produit scalaire* $\langle f\mid g\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}fg$.
Montrer que cette suite ne possède aucune valeur d'adhérence.

EXERCICE 12. † *On considère un sous-groupe* G *de* $(\mathbb{R},+)$. *Montrer que si* G *n' est pas monogène, (de la forme* $a\mathbb{Z}, a\in\mathbb{R}^*$*), alors* G *est dense dans* $\mathbb{R}$ *(au sens où* $d(x,G)=0$ *pour tout* $x\in\mathbb{R}$*). Pour cela, on considèrera l'inf* α *des éléments* ***strictement positifs*** *de* G *en distinguant le cas où il est nul.*

Discuter le cas de $G_{x,y}=\{ax+by\mid a,b\in\mathbb{Z}\}$. *À quelle condition sur* y/x *est-il dense ? En déduire les adhérences de* $P=\{2^a.3^b\mid(a,b)\in\mathbb{Z}^2\}$ *et* $S_\theta=\{\cos(n\theta)\mid n\in\mathbb{Z}\}$ *(se servir de ce que l'image continue d'une partie dense est dense).*
En déduire aussi que tout groupe fini de rotations du plan est cyclique.

EXERCICE 13. *On considère une partie non vide* A *de* E *et l'application* $f:E\to\mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x)=d(x,A)=\operatorname*{Inf}_{a\in A}\|x-a\|.$$

Montrer que f *est 1-lipschitzienne, et prononcez-le sans postillonner (indic : commencer par encadrer* $\|x-a\|$ *pour un* $a\in A$ *fixé).*

EXERCICE 14. A *est une partie convexe (non vide) de* E. *Montrer que l'application* $f:x\to d(x,A)$ *est alors convexe (faire un dessin !).*

EXERCICE 15. *(*) On considère l'espace* $E=\{f\in\mathcal{C}^2([0,1];\mathbb{R})\mid f(0)=f'(0)=0\}$ *et on pose*

$$\|f\|=\operatorname*{Sup}_{[0,1]}|f''+2f'+f|$$

Montrer que ceci définit bien une norme. Montrer l'inégalité $\|f\|_\infty\leqslant\Big(1-\dfrac{2}{e}\Big)\|f\|$ *(poser* $g(t)=e^tf(t)$*).*

EXERCICE 16. *On considère* $E_n = \{a_1\varepsilon_1 + \dots a_n\varepsilon_n \mid a_1, a_2 \dots a_n \in \mathbb{C}\}$ *où* $\varepsilon_k : t \mapsto e^{ikt}$. *C'est un sev de l'ensemble des fonctions continues* 2π*-périodiques.*

On fixe $f \in E_n : f = a_1\varepsilon_1 + \dots a_n\varepsilon_n$. *En calculant puis en majorant l'intégrale* $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f|^2$, *montrer*

$$\forall k = 1 \dots n \quad |a_k| \leqslant \operatorname{Sup}_j |a_j| \leqslant \sqrt{|a_1|^2 + \dots |a_n|^2} \leqslant \|f\|_\infty$$

où comme toujours $\|f\|_\infty = \operatorname{Sup}_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$ *(il existe, par périodicité et continuité de* f*).*

En déduire une constante c_n *(la meilleure possible est* $\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$*) telle que*

$$\forall f \in E_n \quad \|f'\|_\infty \leqslant c_n\|f\|_\infty$$

Ouverts, fermés

EXERCICE 17. A *est un sev de* E. *Montrer que* $\overline{A}$ *est aussi un sev. En déduire qu'il y a, du point de vue topologique, deux sortes d' hyperplans, et les qualifier.*

Que dire d'un sev ouvert ?

EXERCICE 18. *Une conique est une partie du plan définie par* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid P(x, y) = 0\}$, *avec* P *qui est un polynôme de degré 2 (avec des termes en* x^2, xy, y^2 *au pire). Montrer que toute conique est fermée. Comment généraliseriez-vous ce résultat ?*

EXERCICE 19. *Montrer que si* A *et* B *sont bornées alors* $A \cup B$, $A \cap B$, $A + B$ *et* $\overline{A}$ *le sont.*

En notant $\delta(A) = \operatorname{Sup}_{x,y\in A} \|x - y\|$ *le diamètre de* A, *montrer que*

$$A \subset B \;\Rightarrow\; \delta(A) \leqslant \delta(B) \quad \textit{et} \quad \delta(\overline{A}) = \delta(A)$$

EXERCICE 20. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue. Montrer que son graphe* $G = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ *est un fermé de* $\mathbb{R}^2$. *Montrer par un contre-exemple que la réciproque est fausse.*

EXERCICE 21. † *Adhérence, intérieur, d'une boule ?*

EXERCICE 22. ** Si* A *et* B *sont deux parties disjointes,* A *étant ouverte, montrer que* $A \cap \overline{B} = \emptyset$. ** En déduire que si deux ouverts* A, B *sont disjoints il en est de même de* $\mathring{\overline{A}}$ *et* $\mathring{\overline{B}}$ *(utiliser les complémentaires).*

EXERCICE 23. *Que peut-on dire des intérieurs et adhérences de* $A \cup B$ *?* $A \cap B$ *? (Danger !)*

Montrer que si $A \subset B$ *alors* $\mathring{A} \subset \mathring{B}$ *et* $\overline{A} \subset \overline{B}$.

EXERCICE 24. *Trouver deux fermés* **disjoints** A, B *de* $\mathbb{R}^2$ *ou* $\mathbb{R}$ *dont la distance soit nulle :* $\operatorname{Inf}_{(a,b)\in A\times B} \|a-b\| = 0$.

EXERCICE 25. *Montrer que si* A *est un ouvert non vide, alors pour tout partie* B *non vide de* E,

$$A + B = \{a + b \mid (a, b) \in A \times B\}$$

est ouvert. Un ouvert peut-il être, de même, somme de deux fermés (non ouverts !) ?

EXERCICE 26. *Un corollaire de l'exo 13 : soit* A *une partie non vide de* E.

Montrer que $A_n = \{x \in E \mid d(x, A) < 1/n\}$ *est un ouvert. Vérifier que* $\bigcap_n A_n = \overline{A}$.

En déduire que tout fermé est une intersection dénombrable d'ouverts, puis que tout ouvert est réunion dénombrable de fermés.

EXERCICE 27. *** (Centrale) On considère le sous-espace $\mathcal{C}$ des suites convergentes dans l'evn $\mathcal{B}$ des suites réelles bornées.*
*Est-ce un fermé ? On aura besoin du * critère de Cauchy (hors-programme) : une suite (numérique) (ℓ_p) converge si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$ on a $|\ell_p - \ell_q| \leqslant \varepsilon$ pour p et q assez grands. On démontrera ce critère en remarquant qu'une suite vérifiant cette condition est bornée et donc possède une valeur d'adhérence.*

EXERCICE 28. *Montrer que $\operatorname{Fr} A, \overset{\circ}{A}$ et $E \setminus \overline{A}$ forment une partition de E, quelque soit la partie A (ces trois ensembles sont disjoints et leur réunion est E). De quoi $E \setminus \overline{A}$ est-il l'intérieur ? En déduire que A et $E \setminus A$ ont même frontière.*

EXERCICE 29. *f et g sont deux applications continues de E dans $\mathbb{R}$. Montrer que les applications $f^+ = \mathrm{Sup}(f, 0)$, $|f|$, $\mathrm{Sup}(f, g)$ sont continues. Même question quand f et g sont lipschitziennes.*

Matrices et topologie (la réduction des matrices doit être connue)

EXERCICE 30. *Montrer que le groupe linéaire $G\ell_n(\mathbb{K})$ est **dense** dans $M_n(\mathbb{K})$.*

EXERCICE 31. *Montrer que le groupe spécial linéaire $S\ell_n(\mathbb{K})$ des matrices de déterminant 1 est **fermé** dans $M_n(\mathbb{K})$.*
Idem pour $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{A \mid {}^tAA = I_n\}$.

EXERCICE 32. ** Montrer que le sous-ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense. Montrer qu'il n'en est pas de même dans le cas réel (considérer la matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$).*

EXERCICE 33. *(X) * Montrer que l'adhérence de $\mathcal{R} = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid \exists n \in \mathbb{N}^* \quad A^n = I\}$ est l'ensemble des matrices dont les valeurs propres sont sur le cercle unité.*

EXERCICE 34. *On considère une matrice réelle diagonalisable A telle que Sp$(A) \subset]0, +\infty[$, c'est à dire qu'il existe P inversible et des réels > 0 $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ tels que $P^{-1}AP$ soit égale à la matrice diagonale $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$. On pose*

$$U_0 = A \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n + A.U_n^{-1})$$

Montrer que cette suite est bien définie et converge (on pourra commencer par étudier les suites numériques *vérifiant $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n + \dfrac{\lambda}{u_n})$). Quelle est sa limite ? Que se passera-t-il avec une matrice moins sympathique ?*

EXERCICE 35. *(Cet exercice nécessite de connaître le théorème spectral dans les espaces euclidiens)*
On dit qu'un endomorphisme symétrique u est **positif** *quand toutes ses valeurs propres sont positives (ou nulles), et* **défini positif** *quand toutes ses vp sont strictement positives.*
Montrer que cela équivaut respectivement à $< x \mid u(x) > \geqslant 0$ pour tout vecteur $x \in E$ (resp. > 0 pour tout vecteur $x \neq 0$).
Montrer que l'ensemble des endomorphismes positifs est fermé.
** Montrer que l'ensemble des endomorphismes défini positifs est ouvert* dans le sous-espace vectoriel des endomorphismes symétriques.
On pourra vérifier que sur ce dernier espace vectoriel, $u \mapsto \operatorname*{Sup}_{x \neq 0} \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|}$ est bien définie et que c'est une norme, et appliquer cette fonction à u^{-1} quand u est défini positif.

EXERCICE 36. *On considère une matrice complexe A et l'ensemble des matrices qui lui sont semblables : $\mathcal{O}_A = \{PAP^{-1} \mid P \in \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{C})\}$.*
*** Montrer que cet ensemble est fermé $\iff$ A est diagonalisable (un sens est assez facile).* *(X)*

Continuité d'applications linéaires

EXERCICE 37. $E = \mathbb{R}[X]$ *muni de* $\|P\| = \|\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\| = \operatorname{Sup}_n |a_n|$.

Continuité des applications suivantes :

- $P \mapsto P(c)$, $c \in \mathbb{C}$ *fixé (discuter).*
- $P \mapsto P.Q$ *(*$Q \in E$ *fixé).*
- $P \mapsto \int_0^1 P$.
- $P \mapsto P'$, $\quad P \mapsto \int_0^X P$.

Même question en prenant la norme $\|P\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |P|^2}$ *ou une autre de votre choix.*

EXERCICE 38. *On munit l'espace* $\mathcal{C}$ *des applications continues de* $[0,1] \to \mathbb{R}$ *de la norme* $\|f\|_1 = \int_0^1 |f|$.
Soit $c \in]0,1[$, *montrer que la forme linéaire* $\Phi : f \mapsto f(c)$ *n'est pas continue.*

EXERCICE 39. *On considère l'espace vectoriel* $\mathcal{L}_c(E)$ *des endomorphismes continus de* E. *On pose pour tout* $u \in \mathcal{L}_c(E)$, $N(u) = \operatorname*{Sup}_{x \in E, x \neq 0} \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|}$. *Montrer que* N *est une norme, et que de plus* $N(u \circ v) \leqslant N(u) \times N(v)$.

EXERCICE 40. $E = M_n(\mathbb{K})$ *muni de la norme que vous préférez. Montrez que les applications suivantes :*

$$A \mapsto \det A \quad (A, B) \mapsto A.B \quad A \mapsto A^{42} \quad \textit{et} \quad A \mapsto A^{-1}$$

sont continues, respectivement de $E \to \mathbb{K}, E^2 \to E, E \to E, GL_n(\mathbb{K})$ *dans lui-même.*

Compacts

EXERCICE 41. *On considère une application* f *du compact* K *dans lui-même, qui* **diminue** *les distances ie*

$$\forall x, y \in K \quad (x \neq y) \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$$

En étudiant une application de K *dans* $\mathbb{R}$, *montrer que* f *possède un et un seul point fixe.*

EXERCICE 42. A, B *sont deux fermés de* E *et* A *est de plus compacte. Montrer que* $A+B = \{a+b \mid (a,b) \in A \times B\}$ *est fermée. Est-ce encore vrai si* A *n'est plus compacte ?*

EXERCICE 43. *Soit* f *une bijection continue du compact* K *dans* K', *montrer que la réciproque de* f *est aussi continue (on dit que* f *est un* ***homéomorphisme****) (classique). Utiliser, soit la caractérisation de la convergence d'une suite dans un compact par l'unicité de la valeur d'adhérence, soit la caractérisation de la continuité par les images inverses de fermés.*
Donner un exemple d'application bijective ***continue****, mais non* ***bi****continue.*

EXERCICE 44. *Compacité des ensembles suivants ?*
Le groupe orthogonal = $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^tA = Id\}$ *Une conique. Une réunion finie de compacts.*
$SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$ *La somme* $A + B = \{a + b\}$ *de deux compacts.*
La sphère unité de $C^0([0,1], \mathbb{R})$ *munie de la norme sup.*
La boule unité fermée de $\mathbb{R}[X]$ *muni de la norme* $\|\sum a_k X^k\| = \operatorname{Max} |a_k|$.
** L'ensemble des valeurs d'une suite convergente.*

EXERCICE 45. *Montrer que la distance d'un point à un compact* $d(a, K)$ *est atteinte. En déduire (en dimension finie) que la distance d'un point à un fermé est atteinte aussi.*
De même, si K *est un compact, montrer qu'il existe un couple* (a, b) *de points de* K *tels que le diamètre de* K *y soit atteint :* $\delta(K) = \|a - b\|$.
Montrer que a, b *sont des points de la frontière de* K*, càd qu'aucun des deux ne peut être un point intérieur (dessin !).*

EXERCICE 46. *On considère l'ensemble* U_n *des polynômes unitaires de degré* n *:* $P \in U_n \iff P(X) = X^n + \ldots + a_0$. *Montrer que la norme* $\|P\| = \operatorname{Sup}_{[-1,1]} |P|$ *atteint un minimum* a_n *sur* U_n. *Calculer* a_1, a_2. * $\lim_{n\to\infty} (a_n)$ *?*

EXERCICE 47. *Soit* $\varepsilon > 0$ *fixé et un compact* A *de l'evn* E. *Montrer que* A *est inclus dans la réunion d'un nombre fini de boules de rayon* ε *(sinon on fabrique par récurrence une suite de* A *telle que* $\|u_p - u_q\| \geqslant \varepsilon$ *pour tous* $p \neq q$*).*
En déduire qu'il existe un sev F *de dimension finie de* E *tel que* $d(A, F) \leqslant \varepsilon$ *(un compact est « pas très loin » d'être de dim finie).*

Dorénavant E est de dimension finie sauf mention explicite du contraire

---

EXERCICE 48. *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$. *On suppose que la suite de terme général* $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge dans* $\mathcal{L}(E)$ *(pour la norme que vous préférez). Montrez que sa limite est un projecteur.*

EXERCICE 49. *Montrer que l'ensemble* $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}(E)$ *des projecteurs est un fermé.*
** Est-ce vrai dans* $\mathcal{L}_c(E)$ *(endomorphismes continus) en dimension infinie ?*

EXERCICE 50. *Montrer que l'application* $A \mapsto \chi_A$ *(polynôme caractéristique) est continue de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *dans* $\mathbb{R}_n[x]$.

EXERCICE 51. *On fixe* n *réels distincts* $x_1 \ldots x_n$. *À tout* n*−uplet* $(y_1 \ldots y_n) \in \mathbb{R}^n$, *on associe l'unique polynôme* $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ *tel que* $\forall i, P(x_i) = y_i$. *Montrer que cette application est continue. Et l'application réciproque ?...*

EXERCICE 52. *On fixe* n *et on considère une suite de polynômes dans* $\mathbb{R}_n[X]$. *Montrer que la convergence simple implique la convergence uniforme sur* $[-M, M]$.

EXERCICE 53. Une application aux racines de polynômes... adapté de X-ENS MP 2017
a) Soient P, Q *des polynômes de* $\mathbb{R}[X]$ *de degrés* $p, q > 0$ *respectivement. Montrer que l'application de* $\mathbb{R}_{q-1}[X] \times \mathbb{R}_{p-1}[X] \to \mathbb{R}_{p+q-1}[X]$ *définie par*

$$L_{P,Q} : (U, V) \mapsto PU + QV$$

est un isomorphisme si et seulement si P *et* Q *sont premiers entre eux.*
b) Montrer que $P \in \mathbb{R}[X]$ *de degré* $d \geqslant 1$ *a toutes ses racines simples dans* $\mathbb{C}[X]$ *si et seulement si* P *et* P' *sont premiers entre eux.*
c) Construire à l'aide de $L_{P,P'}$ *une application* $r : \mathbb{R}_d[X] \to \mathbb{R}$, *polynômiale en les coefficients de la variable* $P \in \mathbb{R}_d[X]$, *telle que* $r(P) \neq 0 \Rightarrow$ *les racines de* P *dans* $\mathbb{C}[X]$ *sont simples (A.N. pour* $d = 2$ *?)*
d) Soit P *un tel polynôme. Que dire des polynômes voisins de* P *dans* $\mathbb{R}_d[X]$ *? (considérer* $r^{-1}(\mathbb{R}^*)$*)*

Connexes par arcs

EXERCICE 54. *Les ensembles suivants sont-ils connexes par arcs ?*
$\mathbb{R}^*$ $\mathbb{C}^*$ $\mathbb{Q}$ *un cercle* *une boule* *une sphère* *le ruban de* MÖBIUS
La courbe d'équation $x^3 + y^3 = 3xy$ *la courbe* $y^2 = x^3 - 3x^2 + 2x$.
L'ensemble de MANDELBROT *Le lapin de* DOUADY *Votre ours en peluche préféré.*
(ce sont des questions très sérieuses ! cf. No spécial de Tangente) $G\ell_n(\mathbb{R})$ $*$ $G\ell_n(\mathbb{C})$. *Une conique.*
L'ensemble des matrices diagonalisables (resp. nilpotentes) sur $\mathbb{R}$, *sur* $\mathbb{C}$.
Une réunion de segments du plan tels que tout segment rencontre la réunion des autres.

EXERCICE 55. *Soit* f *une application continue du cercle unité* $\mathbb{U}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$. *Montrer que* f *n'est pas injective. Donner un exemple d'une telle application.*

EXERCICE 56. *Soit* A *une partie bornée et étoilée en 0 (si* $x \in A$ *alors* $[0, x] \subset A$*). Montrer que le complémentaire de* A *est connexe par arcs (dessin !). Est-ce vrai si on retire l'hypothèse "étoilé" ?*
Voisin : montrer que le complémentaire du sev F *de* $\mathbb{R}^n$ *est connexe par arcs ssi* $\dim E - \dim F \geqslant 2$.

EXERCICE 57. ** Soit* (u_n) *une suite numérique telle que* $u_{n+1} - u_n \to 0$. *Montrer par un exemple qu'une telle suite peut diverger. Montrer que l'ensemble de ses valeurs d'adhérence est un intervalle (dans un evn, ** est connexe par arcs). Il est conseillé de faire un dessin, avec des* u_p, u_q *proches de deux valeurs d'adhérence distinctes. Quel est l'ensemble des v.a. de* $\left(\sin(\sqrt{n})\right)$ *?*

EXERCICE 58. *On appelle* ***bassin*** *d'une mer ou d'un océan* M *la partie des terres où toute rivière, tout ruisselet, toute goutte d'eau répandue, finira par s'écouler dans* M. *Montrer que le bassin méditerranéen est connexe par arc (on supposera que le bord de mer l'est, négligeant quelques îles au passage. . .)*