ARCS PARAMÉTRÉS

EXERCICE 1. *On considère l'arc* $(x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, z = \cos 2t)$. *Symétries, période ? Tous ses points sont-ils* ***réguliers*** *? Y a-t-il des points à tangente verticale ?*

EXERCICE (EAT MUTATEM RESURGO).

On considère la fonction définie en polaires par $\rho = e^{m\theta}$ *(spirale logarithmique), autrement dit* $x = e^{m\theta}\cos\theta, y = e^{m\theta}\sin\theta$. *Trouver une propriété liant la tangente au point* M *et le vecteur* $\vec{OM}$.

Étudier la propriété réciproque : si on a un arc plan de classe $\mathcal{C}^1$ *tel que le vecteur dérivé au point* M *fasse un angle constant avec* $\vec{OM}$, *est-ce une spirale logarithmique ?*

EXERCICE 3. *Hélice circulaire. On paramètre une hélice par* $x = a\cos t, y = a\sin t, z = ct$. *Montrer que le couple* (x, y) *vérifie une relation simple* $\forall t \in \mathbb{R}$. *Montrer que la tangente à la courbe fait un angle constant avec l'horizontale.*

EXERCICE 4. *Tracé du trifolium de Descartes : on considère la courbe d'équation* $x^3 + y^3 = 3axy$ *où* $a > 0$ *est un paramètre pour pas avoir l'air trop NH. En posant* $t = y/x$, *trouver une paramétrisation de cette courbe. A-t-on bien tous les points quand* t *décrit* $\mathbb{R}$ *? Tracer cette courbe, en précisant sa symétrie. On étudiera le comportement de* $x + y$ *quand* $t \to -1$.

EXERCICE 5. *On considère un arc paramétré* $t \mapsto f(t)$ *de classe* $\mathcal{C}^2$ *de* $\mathbb{R}^2$ *ou* $\mathbb{R}^3$ *euclidien. Montrer que la quantité* $\dfrac{\|f'(t) \wedge f''(t)\|}{\|f'(t)\|^3}$ *définie en tout point régulier est invariante par changement de paramètre. Que vaut-elle par exemple sur un cercle ?*

EXERCICE 6. *On considère l'arc plan* $(x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t)$ *(astroïde). La tracer. Calculer l'équation de la tangente au point de paramètre* t, *montrer qu'elle coupe les axes en deux points dont la distance est constante.*

** Réciproque (HP) ? [on pourra déjà* dériver l'équation de la tangente *écrite au point de paramètre* t *sous la forme* $a(t)x(t) + b(t)y(t) = c(t)$, *avec les fonctions* a, b, c *trouvées ci-dessus.].*

EXERCICE 7. *À quelle condition la droite* $y - y_0 = p(x - x_0)$ *coupe-t-elle l'ellipse* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *en deux points confondus ? [se ramener à une équation de degré 2 en* x *et annuler son discriminant]*

C'est alors une tangente (cf. le cas du cercle).

Peut-on avoir deux telles tangentes à l'ellipse qui soient perpendiculaires ? Quelle condition vérifient alors (x_0, y_0) *?*

*En déduire le lieu des points d'où l'on voit cette ellipse sous un angle droit (****l'orthoptique*** *de l'ellipse).*

EXERCICE 8. *Montrer que la relation* $x^y = y^x, y \neq x$ *définit une courbe* $y = f(x)$, *à certaines conditions que l'on précisera. * Tracer cette courbe, à l'aide d'une paramétrisation (poser* $t = y/x$*) ou grâce à l'étude de la fonction* $\phi(u) = \ln(u)/u$.

EXERCICE 9. *On considère deux points* (F, F') *de cordonnées respectives* $(-c, 0)$ *et* $(c, 0)$ *ainsi qu'un réel* $a > c > 0$. *Montrer que la condition* $MF + MF' = 2a$ *équivaut (si on prend* $M = (x, y)$ *à* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. *Paramétrer cette ellipse. Trouver l'équation de la normale en un point* M, *vérifier que cette normale est la bissectrice de* $\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MF'}$ *(premier petit théorème de Poncelet).*

EXERCICE 10. *On considère la cycloïde (mouvement suivi par un point d'une roue de vélo) paramétrée par* $\begin{cases} x &= a(t - \sin t) \\ y &= a(1 - \cos t) \end{cases}$ $(a > 0$ *fixé*$)$. *Montrer que la courbe est périodique, au sens où le point de paramètre* $t + 2\pi$ *est translaté du point de paramètre* π.

Justifier que $t \mapsto x(t)$ *est une bijection croissante de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, *dérivable. Sa fonction réciproque est-elle encore dérivable ?*

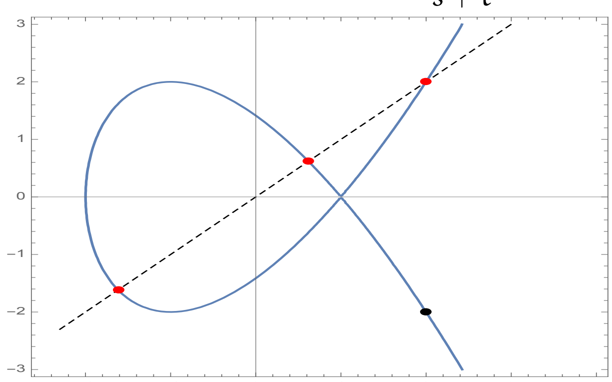
En déduire que quand $0 < x < 2\pi a$, *la courbe est le graphe d'une fonction* $y = \varphi(x)$ *(on n'explicitera pas la fonction* φ*) et calculer par changement de variable l'aire* $\int_0^{2\pi a} \varphi(x)\, dx$ *comprise entre cette courbe et l'axe* (Ox) *(rép.* $3a^2\pi$*).*

EXERCICE 11. *Montrer que la courbe d'équation* $x^3 - 3x + 2 = y^2$ *peut se paramétrer par* $t = \dfrac{y}{x-1}$. *On trouvera* $x = t^2 - 2, y = t^3 - 3t$. *Tracer cette courbe à l'aide de la fonction* $x \mapsto \sqrt{x+2}(x-1)$.

*a) * (calculatoire) Montrer que les points de paramètres* s, t *et* $r = -\dfrac{3+st}{s+t}$ *sont alignés.*

On définit alors une loi de composition interne sur la courbe de la façon suivante : étant donnés deux points S, T *de paramètres* s *et* t, *leur « produit » est le symétrique* R' *(par rapport à* (Ox)*) du point* R *de paramètre* r *où la droite* (ST) *recoupe la courbe (si* $S = T$ *on prend la tangente). Algébriquement, on pose donc*

$$\forall s, t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \quad s \square t = \frac{3+st}{s+t}$$



b) Montrer que la loi $\square$ *est commutative et associative.*

c) Vérifier que ∞ *est élément neutre (calculer* $\lim_{t \to \infty} s \square t$*) et que le symétrique pour la loi* $\square$ *du point de paramètre* s *est son symétrique géométrique, de paramètre* $-s$.

d) Calculer $s \square s$. *Le groupe que l'on a ainsi défini est-il isomorphe à* $(\mathbb{R}^*, \times)$ *?*

e) On pose $m(s) = \begin{pmatrix} s & 3 \\ 1 & s \end{pmatrix}$. *Calculer* $m(s)\binom{t}{1}, m(s)m(t)$ *et enfin* $m(s)m(t)\binom{1}{0}$. *Quels sont les valeurs propres de ces matrices ? (les vecteurs propres sont indépendants de* s *et valent* $(\pm\sqrt{3}, 1)$*)*