CONVEXITÉ MP

EXERCICE 1. *On appelle* enveloppe convexe *d'une partie finie du plan* $P = \{x_1 \dots x_n\}$ *l'ensemble* $\widehat{P} = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \mid \sum \lambda_i = 1$ *et* $\forall i, \lambda_i \geqslant 0\}$ *des barycentre des* x_i *avec des coefficients positifs.*
Montrer que c' est une partie convexe *et qu'elle contient* P*. La dessiner pour 12 points aléatoires.*
Montrer que l'enveloppe convexe n'est autre que le plus petit convexe (au sens de l'inclusion) contenant la famille, i.e. $\widehat{P} = \bigcap_{C \supset P, C \text{ convexe}} C$.

EXERCICE 2. Évident, vraiment ? *Soit* C *une partie convexe non vide.*
Montrer que $C+C = 2C$*. Donner un contre-exemple si on retire l'hypothèse "convexe".*
(Rappelons que $A + B = \{a + b, (a, b) \in A \times B\}$ alors que $2C = \{2c, c \in C\}$)

EXERCICE 3. *On propose cet exercice avec un triangle mais si vous êtes courageuse(/geux) traitez-le avec* n *complexes pas forcément distincts.*
On considère donc 3 complexes a, b, c *et on forme* $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$*. Montrer que les racines de* P' *sont* à l'intérieur *du triangle* abc *(c'est à dire que ce sont des barycentres à coefficients strictement positifs de* a, b *et* c*). On pourra établir que* $\frac{P'}{P} = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c}$.
Comparer les isobarycentres de ces deux ensembles de racines.

EXERCICE 4. *La géométrie de Papy : commençons par considérer un vrai triangle* (ABC) *dans le plan, montrer que tout point du plan peut s'exprimer comme un barycentre de* A, B, C *et ce de manière unique à constante près :*

$$M = \frac{aA + bB + cC}{a + b + c} = \frac{a'A + b'B + c'C}{a' + b' + c'} \iff \exists \lambda, (a', b', c') = \lambda(a, b, c)$$

(on pourra choisir des coordonnées sympa pour A, B, C*). On dira alors que* (a, b, c) *sont un système de coordonnées barycentriques de* M *dans le repère* (ABC).
Ensuite montrer que les triplets de droites suivantes sont concourantes aux barycentres de ABC *affectés des coefficients donnés :*

(1) Les médianes au point de coordonnées barycentriques $1, 1, 1$.

(2) Les hauteurs au point de coordonnées barycentriques $\tan \widehat{A}, \tan \widehat{B}, \tan \widehat{C}$.

EXERCICE 5. *Soient* $x_1 \dots x_n$ *des réels* > 0*. Montrer que* $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geqslant n$.

EXERCICE 6. *Encadrer la fonction* $\cos$ *sur* $[\pi/2, \pi]$ *par deux fonctions affines.*

EXERCICE 7. *Que peut-on dire de la somme de deux fonctions convexes ? De leur produit ?*

EXERCICE 8. *Soit* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *convexe et bornée. Montrer qu'elle décroît.*

EXERCICE 9. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *convexe et majorée. Montrer qu'elle est constante.*
Soit une fonction f *de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}$*, bornée et non constante. Montrer que* f'' *change de signe (existence d'un point d'inflexion).*

EXERCICE 10. *Soit* f *une fonction convexe de classe* $\mathcal{C}^1$ *de* $[a,b]$ *dans* $\mathbb{R}$*. En encadrant le graphe de* f *par deux trapèzes, montrer que*

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \int_a^b f \leqslant (b-a)\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)$$

EXERCICE 11. *Montrer les inégalités*

$$\sqrt{x+y} \geqslant \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{2}} \quad \forall x,y \geqslant 0$$

$$*\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln x \ln y} \quad \forall x,y \geqslant 1$$

EXERCICE 12. f *est convexe sur* $\mathbb{R}$*. Montrer qu'elle est*

— *soit croissante sur* $\mathbb{R}$
— *soit décroissante sur* $\mathbb{R}$
— *soit décroissante jusqu'à un réel* a*, puis croissante.*

EXERCICE 13. *La* méthode de Newton *consiste à itérer la relation*

$$u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}.$$

On suppose que f *est définie sur un intervalle* I*, que* I *est stable par* f*, que* f *est concave mais* $f' > 0$*, et enfin que* f *a une racine en* $\alpha \in I$ *(faire un dessin !).*
On prend $u_0 \in I, u_0 < \alpha$*. Montrer que la suite* (u_n) *est bien définie, croissante dans* $[u_0, \alpha]$*, et converge vers* α*.*

EXERCICE 14. *On considère une fonction* **continue** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

(l'image du milieu est en dessous du milieu des images)
Montrer que

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

quand λ *est de la forme* $\lambda = \dfrac{k}{2^n}, n \in \mathbb{N}^*, k \in [\![0, 2^n]\!]$*, puis pour* $\lambda \in [0,1]$ *et conclure.*

EXERCICE 15. *Montrer que pour tous réels positifs* $x_1, \dots x_n, y_1, \dots y_n$ *on a*

$$(x_1 \dots x_n)^{1/n} + y_1 \dots y_n{}^{1/n} \leqslant \big((x_1+y_1)(x_2+y_2)\dots(x_n+y_n)\big)^{1/n}$$

(la fonction $x \mapsto \ln(1+e^x)$ *est convexe. . .)*

EXERCICE 16. « *Power means* ».

Pour toute famille de n *réels* > 0*, et tout réel* $t \neq 0$*, on pose* $M_t(x_1, \dots x_n) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^t\right)^{1/t}$.
Montrer que M_t *tend vers la moyenne géométrique des* x_i *quand* $t \to 0$*. Trouver les limites de* M_t *quand* $t \to \pm\infty$*. On prolonge ainsi* M_t *pour tout* $t \in [_\infty, +\infty]$*.*
Montrer que M_t *est homogène :* $M_t(\lambda x_1, \dots \lambda x_n) = \lambda M_t(x_1, \dots x_n) =$ *pour tout* $\lambda \geqslant 0$*.*
Enfin montrer que $t \mapsto M_t$ *est continue et croissante. Peut-elle être non strictement croissante ?*

EXERCICE 17. Minimum de Γ

On montrera vers janvier (en exo) que le logarithme de la fonction $G : x \mapsto \int_0^\infty e^{-t}t^x\,dt$ *est une fonction convexe (et même strictement).*
Vérifier que $G(n) = n!$ *pour* $n \in \mathbb{N}$ *et en déduire que* G *admet un minimum, situé entre* $x = 0$ *et* $x = 1$*.*