EXERCICE 1. *Vérifier que* $<,>$ *est un produit scalaire défini sur l'espace vectoriel* E*, dans les cas suivants :*

a) $E = \mathbb{R}^2$, $\quad < (x,y),(x',y') >= xx' + \frac{1}{2}(xy' + x'y) + yy'$.

b) $E = \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$, $\quad < f,g >= \int_{-1}^{1} t^2 f(t)g(t)\,dt$.

c) $E = \mathcal{C}^1([-2,1],\mathbb{R})$, $\quad < f,g >= \int_{-2}^{1} f'(t)g'(t)\,dt + f(0)g(0)$.

d) $E = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+) = \{f \in \mathcal{C}^0([0,+\infty[,\mathbb{R}) \quad | \quad |f|^2$ *intégrable sur* $[0,+\infty[\}$, $\quad < f,g >= \int_0^{+\infty} f(t)g(t)\,dt$.

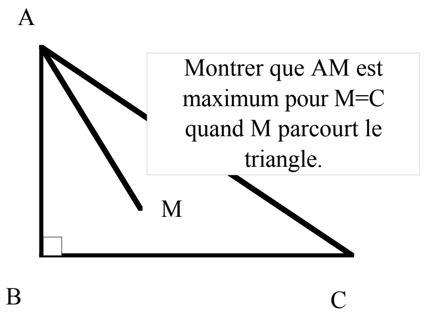
e) $E =$ *e.v. des fonctions à valeurs réelles, continues et bornées sur* $\mathbb{R}$,

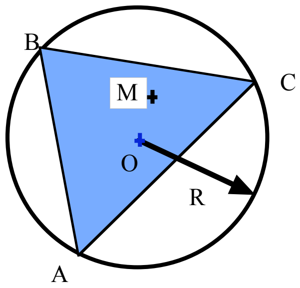
$$< f,g >= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} f(t)g(t)\,dt$$

f) $E = \mathbb{R}_p[X]$, $\quad < P,Q >= \sum_{i=0}^{n} P(x_i)Q(x_i)$, *où* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *sont des réels distincts (condition sur* p, n *?).*

g) $E = \mathbb{R}[X]$, $\quad < P,Q >= \int_{-1}^{1} \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

EXERCICE 2.





En déduire que sur cette figure (où M décrit le triangle hachuré) on a inf(MA,MB,MC) ≤ R

EXERCICE 3. *Montrer l'inégalité entre réels* $(a+b+c)\sqrt{2} \leqslant \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2}$ *(un dessin suffit !)*

EXERCICE 4. *On considère l'espace des variables aléatoires discrètes réelles bornées sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{A})$*. Est-ce que la Covariance y définit un produit scalaire ?*

EXERCICE 5. *On pose* $H = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum (x_{n+1} - x_n)^2 < +\infty\}$*. Montrer que* H *est un espace préhilbertien (donner une norme préhilbertienne / un p.s. convenables).*

EXERCICE 6. *Soit* E *un espace préhilbertien et* $(x,y) \in E^2$*. Calculer* $\|\,(\|y\|^2 x - < x,y > y\,)\|^2$ *et retrouver ainsi l'inégalité de* CAUCHY-SCHWARZ*, ainsi que le cas d'égalité.*

EXERCICE 7. † *Soit* E *un espace préhilbertien et* f, g *deux applications de* E *dans lui même telles que* $\forall (x,y) \in E^2,\ \langle f(x) \mid y \rangle = \langle x \mid g(y) \rangle$. *Montrer que* f *et* g *sont linéaires.*

EXERCICE 8. *Dans* $E = \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ *muni du produit scalaire canonique, montrer que l'orthogonal de* F = *fonctions nulles sur* $[0,1]$ *n'est autre que* G = *fonctions nulles sur* $[-1,0]$. *Si* g *est dans l'orthogonal, introduire une fonction* f_n *de* F *qui coïncide avec* g *sur* $[-1,-1/n]$. *Sont-ils supplémentaires ? Montrer qu'ils sont fermés.*

Variante : quel est l'orthogonal de l'espace des fonctions polynômes ? (utiliser le théorème de WEIERSTRASS*).*

EXERCICE 9. † *On considère un espace préhibertien réel* E *et une application* u *de* E *dans lui-même qui conserve l'origine et la distance :*

$$u(0) = 0 \qquad \textit{et} \quad \forall (x,y) \in E^2 \quad \|u(x) - u(y)\| = \|x - y\|.$$

Montrer successivement que u *conserve la norme, le produit scalaire, puis (en évaluant* $\|u(x+\lambda y) - u(x) - \lambda u(y)\|^2$*) que* u *est linéaire.*

EXERCICE 10. † ** On considère un espace vectoriel réel* E *muni d'une norme* $x \mapsto \|x\|$ *qui vérifie l'identité de la médiane. Montrer que* E *est préhilbertien, c'est à dire que l'application* $f(x,y) = \dfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$ *est un produit scalaire.*

On pourra montrer que $f(2x,z) = 2f(x,z)$ *puis* $f(x+y,z) = f(x,z) + f(y,z)$.

EXERCICE 11. *Pour tout entier naturel* n *supérieur ou égal à 2, on note* $E = \mathbb{R}_n[X]$ *qu'on munit du produit scalaire*

$$(P,Q) \in E^2 \mapsto \langle P \mid Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt.$$

1. *Soit* F *un sous-espace vectoriel de* E *de dimension* p. *Donner sans démonstration la dimension de* $F^\perp$.
2. ***On prend dans cette question*** $n = 2$.
   Déterminer une base du sous-espace $(\mathbb{R}_1[X])^\perp$.
3. ***On revient au cas général :*** $n \geqslant 2$ *et soit* $L_n \in (\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$ *non nul.*
   (a) *Déterminer le degré de* L_n. *Mq* L_n *est défini à une constante près.*
   (b) *On pose, lorsque cela est possible, pour* x *réel :* $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^1 L_n(t)t^x\,dt$.
      i. *Montrer que* φ *est une fonction rationnelle.* . . . et la calculer pour $n = 2$.
      ii. *Déterminer les zéros et les pôles de* φ *et leurs ordres de multiplicité.*
      On pourra examiner les degrés du dénominateur et du numérateur de la fonction rationnelle φ.
      iii. *En déduire une expression de* φ*, à une constante multiplicative près, faisant apparaître le numérateur et le dénominateur sous forme factorisée.*
   (c) *En utilisant la décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle* φ*, exprimer les coefficients de* L_n.

D'après (E3A 2020)

EXERCICE 12. *(*E *et son dual, une question de topologie)*

** On munit l'espace vectoriel* $\mathbb{R}[X]$ *de* $< P, Q > = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$.

Existe-t-il $A \in \mathbb{R}[X]$ *tel que* $\quad \forall P \in \mathbb{R}[X],\ < A, P > = P(0)$ *?*

EXERCICE 13. *a) Montrer que « toute forme linéaire sur un espace euclidien est un produit scalaire », càd que l'application*

$$a \mapsto \left(\varphi_a : x \mapsto \langle\, a \,|\, x \,\rangle\right)$$

qui associe à tout vecteur $a \in E$ *la forme linéaire* $\varphi_A \in E^*$ *est un isomorphisme.*
b) En déduire que, pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ *et tout vecteur* $y \in E$, *il existe un et un seul vecteur* $u^*(y)$ *tel que*

$$\forall x \in E \quad \langle\, u(x) \,|\, y \,\rangle = \langle\, x \,|\, u^*(y) \,\rangle.$$

c) On a ainsi défini une application u^*. *Montrer qu'elle est linéaire (c'est* **l'adjoint** *de* u *et c'est hors-programme).*
d) Soit A *la matrice de* u *dans une base orthonormale* $(e_1, \dots e_n)$. *En notant que* $a_{i,j} = \langle\, e_i \,|\, u(e_j) \,\rangle$, *reconnaître la matrice de* u^* *dans la même base.*

EXERCICE 14. *Soient* $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. *Montrer que*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} k a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} k b_k^2\right).$$

EXERCICE 15. *Soient* $f, g \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, *positives et telles que* $fg \geqslant 1$. *Montrer que* $\left(\int_0^1 f\right) . \left(\int_0^1 g\right) \geqslant 1$.

EXERCICE 16. *Soit* X *l'ensemble des applications continues de* $[0,1]$ *dans* $\mathbb{R}_+^*$. *Montrer que la quantité* $\int_0^1 f . \int_0^1 1/f$ *admet un minimum sur* X, *qui est atteint pour les seuls éléments constants de* X.

EXERCICE 17. *Soit* E *un espace préhilbertien, et soit* e *un vecteur unitaire,* H *l'hyperplan orthogonal à* e.
a) Montrer que l'application $x \mapsto x - \langle\, e \,|\, x \,\rangle e$ *est la projection orthogonale sur* H.
b) Quelle est la distance d'un vecteur x *de* E *à* H *? Quelle est sa distance à la droite vectorielle engendrée par* e *?*

EXERCICE 18. *Soit* p *un projecteur d'un espace préhibertien réel* E. *On rappelle que* p *est orthogonal lorsque* $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(p)^{\perp}$. *Montrer que* p *est orthogonal si et seulement si* p diminue les distances, *i.e.* $\forall x \in E, \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

EXERCICE 19. ***Ondelettes de Haar*** *:*
On pose $\varphi(x) = \chi_{]0,1/2]} - \chi_{[1/2,1[}$ *càd que* φ *vaut 1 (resp. -1) si et seulement si* x *est compris strictement entre 0 et 1/2 (resp. 1/2 et 1). On en déduit par ce qu'on appelle un « changement d'échelle »* $\varphi_{n,k}(x) = \varphi(2^n x - k) \qquad n \in \mathbb{N} \quad k \in \mathbb{Z}$.
Montrer que la famille des $\varphi_{n,k}, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}$ *est orthogonale pour le produit scalaire* $\langle\, f \,|\, g \,\rangle = \int_{\mathbb{R}} f.g$. *On pourra considérer le* ***support*** *des* $\varphi_{n,k}$ *: c'est le plus petit intervalle en dehors duquel la fonction est nulle ; et montrer que si les supports de* $\varphi_{n,k}$ *et* $\varphi_{n',k'}$ *se rencontrent, c'est que l'un est inclus dans l'autre.* (Indic : dessiner ! ! !)
*** Montrer qu'en rajoutant la fonction 1, on obtient une famille totale sur l'espace des fonctions continues par morceaux sur un segment (ceci sert au protocole de compression d'images JPEG).*

EXERCICE 20. † *Soit* E *un espace préhilbertien réel,* $n \in \mathbb{N}^*$, *et* $e_1, e_2, \dots, e_n \in E$ *tels que :*

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad \|e_i\| = 1 \qquad \textit{et} \qquad \forall x \in E, \quad \sum_{i=1}^{n} < e_i, x >^2 = \|x\|^2.$$

a) Montrer d'abord que $(e_1, \dots, e_n)$ *est une famille orthogonale.*
b) Montrer ensuite que c'est une base de E *(qui n'est PAS supposé de dim finie !).*

EXERCICE 21. Familles de polynômes orthogonaux.

On considère $E = \mathbb{R}[X]$ muni d'un produit scalaire de la forme $\langle P \mid Q \rangle = \int_a^b P\,Q\,\mu$ où μ est une fonction > 0 (on admet qu'on a bien un p.s.).

a) Montrer qu'il existe une famille orthogonale (P_n) de polynômes unitaires tels que $d^\circ P_n = n$.

b) Montrer que cette famille est unique. Pour cela, considérer $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ et l'orthogonal **dans E_n** *de E_{n-1}. On observera que $P_n \perp E_{n-1}$.*

c) Vérifier que $\forall P, Q \in E$ $\langle XP \mid Q \rangle = \langle P \mid XQ \rangle$.

d) On considère $D_n = P_{n+1} - XP_n$. Pourquoi est-ce que $D_n \in E_n$?

On écrit alors $D_n = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k$. Justifier que $D_n \perp P_0, P_1 \dots P_{n-2}$.

En déduire que $a_0 = a_1 = \dots a_{n-2} = 0$, puis qu'il existe des scalaires λ_n, μ_n tels que

$$P_{n+1} = (X - \lambda_n)P_n + \mu_n P_{n-1}$$

*e) * Exprimer λ_n, μ_n en fonction des normes de certains P_k.*

EXERCICE 22. *Trouver le minimum de* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\left(\sqrt{x} - ax - b\right)^2}{\sqrt{1-x}}\,dx$ *lorsque (a, b) parcourt $\mathbb{R}^2$.*

EXERCICE 23. *(calculatrice)*

Trouver le minimum de $\displaystyle\int_0^1 (\ln x - a\,x - b)^2\,dx$ *lorsque (a, b) décrit $\mathbb{R}^2$. Bien préciser dans quel espace préhilbertien on se place.*

EXERCICE 24. $E = M_n(\mathbb{R})$*. Montrer que $(A, B) \mapsto Tr({}^tAB)$ fait de E un espace euclidien. Quel y est l'orthogonal de l'ensemble des matrices symétriques $\mathcal{S} = \{A \in E \mid A = {}^tA\}$? En déduire que la distance d'une matrice quelconque $M = [m_{i,j}]$ à l'espace $\mathcal{S}$ vaut* $\displaystyle\operatorname*{Inf}_{A \in \mathcal{S}} \sqrt{\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (m_{i,j} - m_{j,i})^2}$.

EXERCICE 25. *La classe de MP de Ramanujan City (dans la banlieue de Chennai, jadis Madras) a n étudiants. Il est facile de construire un espace euclidien de dimension n où ces n étudiants sont des vecteurs unitaires et équidistants. Mais peut-on réaliser cela dans une dimension strictement inférieure à n ? Quel est alors l'angle entre deux étudiants de MP ? (commencer par $n = 2, 3, 4$).*

EXERCICE 26. *(Mines) Établir pour $P \in \mathbb{R}[X]$* $\displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\,dt = -i\int_0^{\pi} P(e^{it})e^{it}\,dt$ *(* attention au piège !).*

Ensuite établir les inégalités faciles, voire triviales :

$$\int_0^1 P(t)^2\,dt \leqslant \int_{-1}^{1} P(t)^2\,dt \leqslant \int_0^{\pi} |P(e^{it})|^2\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} P(e^{it}).P(e^{-it})\,dt$$

En déduire pour toute famille de réels $(a_0 \dots a_n)$ que l'on a $\displaystyle 0 \leqslant \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n} \frac{a_k a_\ell}{k+\ell+1} \leqslant \pi \sum_{k=0}^{n} a_k^2.$

Rem : C'est une comparaison de normes sur $\mathbb{R}[X]$.

EXERCICE 27. *(Sup) Dans $E = \mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique, on définit le plan F par ses équations :* $\begin{cases} x + y = 0 \\ z + t = 0 \end{cases}$ *dans la base canonique.*

Donner les expressions analytiques de la distance à F, de la projection orthogonale sur F, et du symétrique par rapport à F parallèlement à $F^\perp$ du point $M = (x, y, z, t)$.

EXERCICE 28. *(D'après le concours commun marocain 2002)*

Soit $\wp$ *l'espace vectoriel engendré par les sinusoïdes, c'est à dire l'ensemble des* $f : t \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)$ *où* n *est un entier quelconque et les* a_i, φ_i, ω_i *sont des réels arbitraires. Une base de cet espace est l'ensemble des* $(\cos \omega t, \sin \omega t)$ *où* ω *décrit* $\mathbb{R}$.

Montrer que la quantité $\dfrac{1}{X}\int_0^X f \times g$ *admet une limite pour* $X \to +\infty$ *pour tout couple* $(f, g) \in \wp^2$.

On pose $\langle f \mid g \rangle = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{1}{X}\int_0^X f \times g$, *montrer que c'est un produit scalaire. Que dire de la base ci-dessus par rapport à ce produit scalaire ?*

*** On considère l'espace plus grand* $\mathfrak{B}$ *défini comme les sommes infinies* $\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)$, *avec la condition de convergence normale* $\sum |a_i| < +\infty$. *Montrer que le produit scalaire précédent se prolonge à cet espace (fonctions presque périodiques de* BOHR*).*

EXERCICE 29. Régression linéaire.

On considère un ensemble de points donnés $M_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2, i = 1 \dots n$. *Caractériser la droite d'équation* $y = ax + b$ *qui minimise la somme des carrés des distances (verticales) aux* M_i, *i.e. qui minimise la quantité* $\sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - a x_i - b)^2$.

On montrera entre autres choses que cette droite passe par l'isobarycentre des M_i. *Il sera avantageux de noter* $\overline{\mathrm{truc}}$ *pour la moyenne* $\frac{1}{n}\sum \mathrm{truc}_i$.

EXERCICE 30. *On considère une partie* A *convexe et compacte de* E, *non vide. Soit* $x \in E$.

1) Montrer que $d(x, A)$ *est atteinte.*

2) On suppose que la distance est atteinte en $a \in A$ *et aussi en* $b \in A$ *avec* $a \neq b$. *Montrer, avec un dessin bien argumenté, ou l'identité de la médiane, que cela ne peut pas être.*

On définit donc ainsi une projection comme le point de A *où le minimum de la distance est atteint !*

3) Montrer qu'avec A *non compact ou non convexe on n'a plus forcément existence ou unicité.*

Dans toute la fin, on travaille dans un espace euclidien (dimension finie).

EXERCICE 31. *Soit* A *une matrice symétrique, montrer que la somme des carrés des éléments de* A *est égale à la somme des carrés de ses valeurs propres :*

$$\sum_{i,j} a_{i,j}^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2.$$

EXERCICE 32. *Montrer que* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est semblable à une matrice symétrique réelle* $\iff$ *elle est diagonalisable.*

EXERCICE 33. *On considère* $E = \mathbb{R}_n[X]$ *et* u *définie par* $u : P(X) \mapsto X^n P(1/X)$. *Vérifier que* $u \in \mathcal{L}(E)$ *puis que* u *est diagonalisable, donner une base de vecteurs propres. (Mines-Ponts PC).*

EXERCICE 34. † *Soit* v *un endomorphisme symétrique. Montrer que* $\dfrac{\|v(x)\|}{\|x\|}$ *est majoré par la plus grande des valeurs absolues des valeurs propres de* v. *Quand a-t-on égalité ?*

** Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *une matrice carrée quelconque, montrer que* $S = {}^tAA$ *est symétrique et que ses v.p. sont positives, puis que*

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad \|AX\| \leqslant \sqrt{\lambda}\|X\|$$

où λ *est la plus grande valeur propre de* S *– et que cette inégalité est atteinte* $\iff$ $X \in E_\lambda(S)$ *(*λ *s'appelle le* rayon spectral *de* S*).*

EXERCICE 35. † *On dira que* u *est* ***antisymétrique*** *si dans une base orthonormale sa matrice est antisymétrique :* ${}^tA = -A$*. Montrer que cela équivaut à* $\forall x \in E \quad < x \mid u(x) >= 0$ *(pour la réciproque, développer* ${}^t(X+Y)({}^tA + A)(X+Y)$*).*

Montrer que la seule vp (réelle) possible d'un endomorphisme antisymétrique est 0.

Montrer que si A *est antisymétrique, alors* $\exp A = \sum_{n \geqslant 0} \frac{A^n}{n!}$ *est une matrice de rotation.*

EXERCICE 36. *Soit* A *une matrice antisymétrique. Montrer que* A^2 *est symétrique et que ses valeurs propres sont toutes* $\leqslant 0$*. Qu'en déduire sur les vp complexes de* A *?*

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}), X \neq 0, \lambda \in \mathbb{C}$ *tels que* $AX = \lambda X$*. Que dire de* $\mathrm{Vect}(\mathrm{Re}\, X, \mathrm{Im}\, X)$ *?*

En déduire que A *est semblable à une matrice diagonale par blocs qui sont des 0 ou des matrices* 2×2 *de la forme* $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 37. *On considère un vecteur unitaire* $a \in E$, $k \neq -1$ *un réel. Vérifier que l'application*

$$f : x \mapsto x + k\langle\, a \,|\, x \,\rangle a$$

est symétrique et que c'est un automorphisme, étudier ses éléments propres.

EXERCICE 38. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est symétrique et* $B = A^3 + A + I_n$*. Montrer que* A *est un polynôme en* B *(on pourra utiliser libéralement l'interpolation de Lagrange : pour toute famille* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *de réels distincts et toute famille* $\mu_1, \ldots \mu_n$ *il existe un polynôme* P *tel que* $\forall i = 1 \ldots n, P(\lambda_i) = \mu_i$*).*

EXERCICE 39. † *Ici* $E = \mathbb{R}^3$*. Montrer que l'endomorphisme* $u : x \mapsto a \wedge x$ *est antisymétrique (*a *est un vecteur fixé). Quelle est sa matrice ? En choisissant une base judicieuse, montrer que son exponentielle est une rotation, dont on précisera l'axe et l' angle.*

EXERCICE 40. *Résoudre* ${}^tA.A.{}^tA = I$ *(établir successivement plusieurs propriétés de* A*).*

EXERCICE 41. † *Soit* $M = [m_{i,j}]$ *une matrice orthogonale. Montrer les inégalités suivantes :*

$$\Big|\sum_{i,j} m_{i,j}\Big| \leqslant n \leqslant \sum_{i,j} |m_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}.$$

La dernière égalité est-elle atteinte quand par exemple $n = 3$ *?*

EXERCICE 42. *Reconnaître les applications de matrices :*

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2a^2-1 & 2ab & 2ca \\ 2ab & 2b^2-1 & 2bc \\ 2ca & 2bc & 2c^2-1 \end{pmatrix}$$ *(discuter).*

EXERCICE 43. *Matrice de la rotation autour du vecteur* $(1,1,1)$ *d'angle* α *tq* $\cos\alpha = 4/5$ *et* $\sin\alpha = -3/5$ *?*

EXERCICE 44. † *Montrer que la matrice* $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ *est celle d'une rotation ssi* a, b, c *sont les racines de* $X^3 - X^2 + k$*, où* $0 \leqslant k \leqslant 4/27$*. Axe, angle ?*

EXERCICE 45. *Que dire en dimension trois de deux rotations qui commutent ?*

EXERCICE 46. *Soient* R *une rotation (axe* Δ*, angle* θ*) et* r *une isométrie de* $\mathbb{R}^3$*. Reconnaître* $r \circ R \circ r^{-1}$*.*

EXERCICE 47. *Soit* $A \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ *telle que* $\det A = -1$. *Montrer qu'il existe un changement de B.O.N. qui transforme* A *en* $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

** Dessiner un tétraèdre régulier* $\mathcal{T}$ *(4 sommets, 4 faces qui sont des triangles équilatéraux). Montrer qu'il existe une isométrie de cette forme, avec* $\theta = \pi/2$, *qui envoie* $\mathcal{T}$ *sur lui-même.*

EXERCICE 48. *On se place dans* $\mathbb{R}^3$ *euclidien. On appelle* **demi-tour** *toute rotation d'angle* π, *c'est à dire toute symétrie orthogonale par rapport à un axe.*

a) Montrer que toute rotation est produit de deux demi-tours [prendre deux demi-tours quelconques d'axes D, Δ *et étudier ce que fait leur composée* r, *en commençant par vérifier que la perpendiculaire commune à* D, Δ *existe et est stable par* r*].*

*b) * Montrer qu'on peut paramétrer l'ensemble des (matrices de) demi-tours par deux angles* (θ, ϕ) *et ce de façon continue. En déduire que* $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ *est connexe par arcs.*

EXERCICE 49. *Montrer qu'une matrice orthogonale qui est diagonalisable dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est une symétrie (orthogonale).*

** Montrer que toute matrice orthogonale est diagonalisable dans* $\mathbb{C}$, *avec des valeurs propres de module 1.*

EXERCICE 50. *Soit* u *une isométrie de* E *et* $v = u - \mathrm{id}$.

a) Montrer que $\operatorname{Ker} v = (\operatorname{Im} v)^{\perp}$.

b) Justifier que tout élément x *de* E *peut s'écrire*

$$x = x_1 + v(y), \text{ où } (x_1, y) \in \operatorname{Ker} v \times E$$

c) Vérifier que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k(x) = x_1 + \frac{1}{n}(u^n(y) - y).$$

Pourquoi cette expression a-t-elle une limite quand $n \to +\infty$ *?*

d) Montrer que $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k$ *converge (simplement) vers* p, *la projection orthogonale sur* $\operatorname{Ker} v$.

EXERCICE 51. *Réduire par blocs* 2×2 *les matrices* $A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 & 3 \\ 1 & 9 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & 9 & 1 \\ -3 & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix}$ *et* $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

On cherchera un plan stable (chercher des vecteurs propres), puis son orthogonal.

EXERCICE 52. *On considère une isométrie* s *dont l'espace des points fixes est de dimension* $d < n$. *En considérant un point* x *tel que* $s(x) \neq x$ *et l'hyperplan médiateur de* $(x, s(x))$, *montrer qu'il existe une réflexion orthogonale* r *telle que l'espace des points fixes de* $r \circ s$ *est de dimension au moins* $d + 1$. *En déduire par récurrence sur* d *que toute isométrie est produit d'au plus* n *réflexions orthogonales (théorème de* CARTAN-DIEUDONNÉ, 1946*).*