Séries entières

par Emmanuel AMIOT

1er novembre 2020

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons à un type important de séries de fonctions. Elles apparaissent naturellement par l'opération du développement limité à l'origine d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$, et jouissent de très bonnes propriétés.

I Convergence des séries entières

DÉFINITION 1. *On appelle série entière une série de fonctions de z de la forme $(\sum a_n z^n)$ où les a_n — les coefficients de la série — forment une suite de réels ou de complexes.*

Exemple : $(\sum z^n), (\sum \frac{z^n}{n!}), (\sum \frac{z^{n^3}}{n^2})$ sont des séries entières. Noter dans le dernier cas que la plupart des coefficients sont nuls.

EXERCICE 1. *Que pensez-vous de $(\sum(z^n - z^{2n}))$? Est-ce une série entière ?... Peut-elle s'y ramener ?*

1 Rayon de convergence

Comme pour toute série de fonctions, la question de la convergence est vitale ! Pour les séries entières, nous allons établir un résultat très plaisant : il y a convergence à l'intérieur d'un disque ouvert, et divergence en dehors d'un disque fermé.
Cela peut se comprendre car, par rapport à la variable, on a affaire à du géométrique (z^n). Si le coefficient l'est aussi, le produit est encore géométrique (exemple $(\sum 2^n z^n)$, et cela résiste à d'importantes perturbations (tester la convergence de $(\sum 2^n n^7 z^n)$ ou $(\sum 2^{3n} z^{3n})$, en retirant des termes).

LEMME D'ABEL. *Soit $r > 0$ tel que la suite $(|a_n| r^n)$ soit bornée. Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < r$, la suite $(a_n z^n)$ est dominée par $(|z|/r)^n$ et en conséquence la série entière $(\sum a_n z^n)$ converge.*

Démonstration. Soit M un majorant de $(|a_n| r^n)$:

$$|a_n||z^n| \leqslant |z^n| \frac{|a_n r^n|}{r^n} \leqslant M \frac{|z^n|}{r^n}.$$

Or $|z|/r < 1$ est la raison d'une série géométrique convergente. ♦

En particulier, quand la série entière $(\sum a_n z^n)$ converge en un point z, son terme général tend vers 0 et donc reste borné : le lemme s'applique et prouve le

COROLLAIRE 1. *Si la série entière converge en $z_0 \in \mathbb{C}$, elle converge aussi (et même absolument) pour tout z de module inférieur strictement à $|z_0|$. Si elle diverge en z_0, elle diverge (grossièrement) pour tout z de module strictement supérieur à $|z_0|$.*

Ce qui prouve que l'ensemble des modules des points de convergence est un intervalle — non vide, car il contient toujours 0.

DÉFINITION 2. *Le **rayon de convergence** R de la série entière $(\sum a_n z^n)$ est la borne supérieure de $\{|z| \mid \sum a_n z^n \text{converge}\}$. C'est aussi la borne inférieure de l'ensemble $\{|z| \mid \sum a_n z^n\}$ diverge.*

Compte tenu du lemme d'Abel, on peut assouplir les conditions :

PROPOSITION.

* *Si $a_n z^n$ ne tend pas vers 0 (en particulier si diverge ou non bornée), alors $R \leqslant |z|$.*
* *Si $a_n z^n$ tend vers 0 (ou même reste borné), alors $R \geqslant |z|$.*

On détermine souvent ainsi un rayon de convergence par deux inégalités.

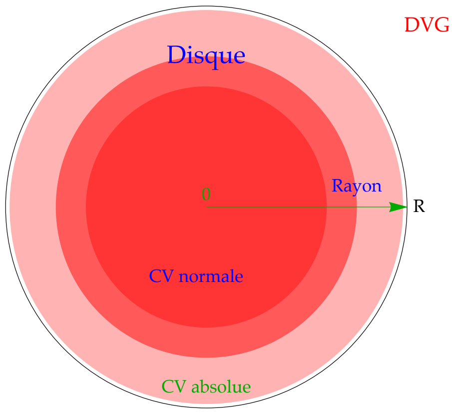

FIGURE 1 – Disque=ensemble, rayon=nombre !

DÉFINITION 3. *Le **disque (ouvert) de convergence** $D(0,R) = \{z \mid |z| < R\}$ de la série entière $(\sum a_n z^n)$ est le plus grand disque **ouvert** où la série converge. En dehors du disque **fermé** $\overline{D}(0,R) = \{z \mid |z| \leqslant R\}$ (c'est à dire pour $|z| > R$, strictement) c'est le contraire, la série est toujours divergente.*

Soyez forts pour l'appellation : “Mal nommer un objet, c'est ajouter au malheur de ce monde.” (A. Camus)

EXEMPLE 1.

- $(\sum z^n/\sqrt{n})$ *converge clairement pour* $|z| < 1$ *et diverge pour* $z = 1$ *: son rayon de convergence vaut donc 1.*
- $(\sum n!z^n)$ *diverge grossièrement pour tout* $z \neq 0$ *(la factorielle l'emporte sur les puissances). Son rayon de convergence est donc nul.*
- $(\sum z^n/n!)$, *la fameuse série exponentielle, a son terme général qui tend toujours vers 0. Cela ne suffit pas pour prouver la convergence d'une série en général, mais dans le cas des séries entières, cela prouve que le rayon de convergence est infini : il y a donc convergence sur* $\mathbb{C}$ *entier.*
- *Soit* (f_n) *la suite des nombres de* FIBONACCI, *comme on sait que* $f_n \sim k\Phi^n$, *la série* $1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + \ldots = \sum f_n x^n$ *converge pour* $|x| < 1/\Phi$ *où* $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

PROPOSITION. *Soient* A *la série* $(\sum a_n z^n)$ *et* B *la série* $(\sum b_n z^n)$. *Si* $a_n = O(b_n)$ *alors* $R_A \geqslant R_B$. *En particulier* $a_n \sim b_n$ *(ou même* $|a_n| \sim |b_n|$*) entraîne que* $R_A = R_B$.

Démonstration. En un z tel que $|z| < R_B$ on a d'après le lemme d'Abel convergence absolue de $(\sum b_n z^n)$, et donc *a fortiori* de $(\sum a_n z^n)$, ce qui prouve que $R_A \geqslant R_B$, d'où la proposition par symétrie. ♦

Nous verrons d'ailleurs plus loin que multiplier a_n par n ou même une puissance de n ne modifie pas le rayon de convergence.

On fera souvent usage du critère de D'ALEMBERT pour établir le rayon de convergence : il se prête bien à une convergence qui est de type géométrique dans le disque de convergence. En revanche **il est exclu d'utiliser cette règle pour une série entière générale** (il faut que le terme général soit donné **explicitement** en fonction de n).

EXEMPLE 2. *Par la règle de d'Alembert* $(\sum n^2 z^n)$ *a un rayon égal à 1. On obtient le même résultat en observant que* $n^2 z^n \to 0 \iff |z| < 1$ *(C.C.).*

REMARQUE 1. *Attention ! Vous trouverez dans des livres une "règle spéciale séries entières" qui consiste à poser* $R = \lim \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. *Ce n'est pas qu'elle soit fausse, c'est qu'elle ne s'applique presque jamais... Elle est donc vivement déconseillée (voyez avec* $\sum 4^n x^{2n}$ *ou* $\sum n!\, z^{n^2}$, *par exemple !)*

2 Propriétés de la convergence d'une série entière

Nous avons mis en évidence un disque fondamental pour la convergence d'une série entière ; on sait ce qui se passe sur deux ouverts, l'intérieur du disque et le complémentaire du disque fermé :

- Pour $z \in D(0, R)$, il y a convergence.
- Pour $z \notin \overline{D}(0, R)$, il y a divergence.

On ne dit pas ce qui se passe sur le cercle de rayon R car il peut s'y passer absolument n'importe quoi ! [1]

Précisons quel type de convergence se produit : nous avons vu qu'en vertu du Lemme d'Abel, il y a convergence **absolue** quand $|z| < r$ où $a_n r^n$ reste borné. Donc :

1. Il y a en général des points de convergence et des points de divergence, parfois aussi emmêlés que rationnels et irrationnels

PROPOSITION. *Il y a convergence absolue dans le disque (ouvert) de convergence.*

Il peut, ou pas, y avoir convergence absolue sur le bord.
Ici on parle de convergence simple. Plus précisément, soit $0 < r < R$: on a pour $|z| \leqslant r$ la majoration

$$|a_n z^n| \leqslant |a_n| r^n, \text{terme général de série convergente par hypothèse}$$

ce qui prouve la **convergence normale dans le disque (fermé) de rayon** r.
Or tout compact[2] du disque (ouvert) de convergence est inclus dans un tel disque (fermé), car la fonction continue $|\ |$ atteint son maximum sur ce compact. Donc :

> **PROPOSITION.** *Une série entière converge normalement sur tout compact de son disque ouvert de convergence (pour le dire plus simplement : sur tout disque fermé inclus dans le disque ouvert de convergence).*

COROLLAIRE 2. *La somme d'une série entière est continue sur le disque ouvert de convergence.*

En effet, $z \mapsto a_n z^n$ est continue et la convergence normale entraîne la convergence uniforme (sur tout compact du disque ouvert).

> **ATTENTION !** comme d'habitude on n'a pas nécessairement la convergence normale ou même uniforme sur le disque ouvert. Se souvenir que $(\sum x^n)$ ne converge pas uniformément (ni normalement donc) sur $]-1, 1[$ éviterait cette bourde calamiteuse. C'est LE point où l'on se trompe sur les séries entières...

EXERCICE 2. *Montrer en reprenant le truc ci-dessus (introduire un $r < R$) que $\sum a_n z^n$ et $\sum n^\alpha a_n z^n$ ont même rayon de convergence, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.*

EXERCICE 3. *Montrer que si $f(x) = \sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$ s'annule en 0, alors 0 est la seule racine dans un voisinage de 0 (i.e. dans un $]-\alpha, \alpha[$, pour α assez petit).*

3 Opérations sur les séries entières

D'un point de vue formel, les séries entières sont équivalentes à des suites (celles de leurs coefficients). Il est naturel de définir la somme de deux séries entières en **ajoutant les** x^n **aux** x^n (parfois il faut réécrire les indices, càd **réindexer**) :

DÉFINITION 4. *La somme des séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est la série $\sum (a_n + b_n) z^n$.*

On voit que c'est un cas particulier de la définition de la somme de deux séries (numériques, ou de fonctions). Ou encore, le prolongement de l'addition des polynômes.
Comme la somme de deux séries convergentes est convergente, et sa somme est la somme de leurs sommes (hé oui), on a la

PROPOSITION. *Le rayon de convergence de la somme de deux séries entières de rayons respectifs R et R' est **au moins** égal à $\mathrm{Inf}(R, R')$.*

2. Voir cours de Topologie.

EXERCICE 4. *Montrer que si $R = R'$, le rayon de la somme des deux séries peut être strictement supérieur, mais que si $R < R'$ alors le rayon de la somme est R.*

On définit sans plus de difficulté une combinaison linéaire de séries entières, avec le même résultat. L'ensemble des séries entières convergentes (de rayons divers mais > 0) est donc de façon naturelle un sous-espace vectoriel de l'espace des séries de fonctions, et l'application (série $\mapsto$ sa somme) est linéaire.
Il est moins évident de définir le produit de deux séries entières. Une bonne raison de prendre le produit de CAUCHY est que, dans ce cas, il prolonge le produit des polynômes : or les polynômes sont des cas (très) particuliers de séries entières. Essayons pour les premiers termes :

$$(a_0+a_1x+a_2x^2+\dots)\times(b_0+b_1x+b_2x^2+\dots) = a_0b_0(x^0)+\big(a_0b_1+a_1b_0\big)x^1+\big(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0\big)x^2+\dots$$

ce qui suggère :

DÉFINITION 5. *Le produit des séries $(\sum a_nz^n)$ et $(\sum b_nz^n)$ est en tout z leur produit de CAUCHY, c'est à dire la série entière*

$$(\sum c_nz^n) \qquad \text{où} \qquad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k} = \sum_{p+q=n} a_p\, b_q.$$

On factorise le z^n dans le produit de Cauchy “ordinaire”.
Exemple : $(1+z+z^2+z^3+\dots)\times(1+z^2+z^4+z^6+\dots) = 1+z+2z^2+2z^3+3z^4+3z^5+4z^6+\dots$
Comme la convergence des deux séries entières est absolue sur l'intersection de leurs disques de convergence, par le théorème sur les séries doubles leur produit de CAUCHY y converge, et sa somme est égale au produit des sommes des deux séries.

PROPOSITION. *Le rayon de convergence du produit de deux séries entières est au moins égal à l'inf des deux rayons.*

Bien entendu, il peut y avoir dépassement :

$$(1-z+0+0+\dots)\times(1+z+z^2+z^3+\dots) = 1!$$

Le phénomène important est facile à retenir. C'est en fait tellement intuitif que la difficulté consiste à imaginer qu'il aurait pu y avoir problème. . .

EXERCICE 5. *Montrer que si le rayon de CV de $(\sum a_nz^n)$ vaut 1 alors celui de la série $\sum A_nz^n$, où $A_n = a_0+\dots a_n$ vaut* ***au moins*** *1, exactement 1 si par exemple les a_n sont positifs (introduire un pdC).*

Quand deux séries entières convergent (absolument), on peut manipuler indifféremment les séries (objets abstraits) et leurs sommes (quantités numériques) : en faire des combinaisons linéaires, des produits (et même pire, mais hors-programme) est sans danger en vertu des deux propositions précédentes.
Un dernier exemple fondamental, déjà vu, de produit de CAUCHY :

PROPOSITION. *Soit* exp *la fonction de* $\mathbb{C}$ *dans lui-même définie par*

$$\exp(z) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}. \qquad \textit{Alors}$$

$$\forall a, b \in \mathbb{C} \qquad \exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b).$$

Cette exp ressemble vraiment de plus en plus à une exponentielle!

Démonstration. On fait le produit de CAUCHY sans états d'âme, le rayon de convergence étant infini.

$$\begin{aligned}\exp(a).\exp(b) &= \sum_{p\geqslant 0} \frac{a^p}{p!} \times \sum_{q\geqslant 0} \frac{b^q}{q!} = \sum_{n\geqslant 0} \left(\sum_{p+q=n} \frac{a^p.b^q}{p!q!} \right) \\ &= \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!} \sum_{p+q=n} \binom{n}{p} a^p.b^q = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!}(a+b)^n = \exp(a+b)\end{aligned}$$

♦

EXEMPLE 3. *On considère la série* $(\sum f_n x^n)$*, où* (f_n) *est la suite de* FIBONACCI*. Faisons le produit de* CAUCHY *avec le polynôme* $1 - x - x^2$ *: on trouve*

$$(1 - x - x^2) \sum_{n\geqslant 0} f_n x^n = f_0 + (f_1 - f_0)x + \sum_{n\geqslant 2} (f_n - f_{n-1} - f_{n-2})x^n = 1!$$

Et donc $\sum_{n\geqslant 0} f_n x^n = \dfrac{1}{1 - x - x^2}$, $\forall |x| < \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Remarquons que cette fonction admet d'autres développements en série de fonctions (comme $\sum (x + x^2)^n$ *dont le domaine de convergence est plus grand), mais qui n'est pas une série entière en* x*).*

II Dérivation et intégration de séries entières

Nous ne savons pas dériver (ou intégrer) par rapport à une variable complexe.[3] Aussi nous restreindrons-nous dans cette partie à des variables réelles.

On considèrera des séries entières de rayon strictement positif R, et on étudiera leur somme sur $]-R, R[$ (le disque de convergence dans $\mathbb{R}$).

1 Dérivation et intégration terme à terme

THÉORÈME 1. *On peut intégrer terme à terme une série entière :*

$$\forall x \in]-R, R[\qquad \int_0^x \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n = \sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Démonstration. Grâce à la convergence normale sur tout segment – disons $[0, x]$ – du disque ouvert de convergence, le théorème d'intégration terme à terme s'applique. ♦

3. On saura... en L3!

THÉORÈME 2. *On peut dériver terme à terme une série entière :*

$$\forall x \in]-R, R[\qquad \Big(\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n\Big)' = \sum_{n\geqslant 1} n.a_n x^{n-1}.$$

COROLLAIRE 3. *La somme d'une série entière de rayon $R > 0$ est $\mathcal{C}^\infty$. Le rayon de convergence ne change pas par dérivation ou intégration terme à terme.*

Démontrons le théorème de dérivation terme à terme d'une série entière.

Démonstration. Soit $x \in]-R, R[$ et choisissons $r \in]|x|, R[$: on a la convergence (absolue) de $(\sum a_n r^n)$, et en particulier $a_n r^n$ est borné.
Donc par le lemme d'ABEL

$$a_n x^n = O\left((\frac{|x|}{r})^n\right) \qquad \text{et donc} \qquad n a_n x^{n-1} = O\left(n(\frac{|x|}{r})^n\right).$$

Ce dernier terme $n(\frac{|x|}{r})^n$ est celui d'une série convergente par la règle de d'Alembert. *Notez qu'on ne peut pas l'appliquer directement à la série étudiée, il faut passer par une majoration par quelque chose de plus robuste !* Ceci démontre la convergence de la série dérivée $(\sum n.a_n x^{n-1})$ au point x dès que $|x| < R$. Comme c'est une série entière, la convergence est normale (et donc uniforme) sur tout compact de $]-R, R[$: le théorème de dérivation terme à terme s'applique (ou pourrait aussi, comme dans la démonstration du TDTàT, utiliser le théorème 1). ♦

Le Corollaire est assez évident par récurrence (notons que le rayon de CV augmente aussi bien en dérivant qu'on intégrant – il reste donc constant). Il apparaît donc que les sommes de séries entières sont des cas particuliers de fonctions $\mathcal{C}^\infty$.

EXERCICE 6. *Grâce au théorème de dérivation terme à terme, montrer que*

$$\frac{1}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{k\geqslant 0} \binom{n+k}{n} x^k.$$

2 Séries entières et séries de Taylor

COROLLAIRE 4. *Soit f la somme de la série entière $\sum a_n x^n$. Alors*

$$a_k = \frac{1}{k!} D^k f(0).$$

Démonstration. $D^k f(x) = \sum_{n\geqslant k} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n x^{n-k} = k! a_k + \dots.$ ♦

On constate donc que les a_k ne sont autres que les coefficients du développement limité (à un ordre $\geqslant k$) de f en 0, à une constante près. Éclaircissons tout celà :

DÉFINITION 6. *Soit f de classe $\mathcal{C}^\infty$. La **série de Taylor** de f est la série entière*

$$\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!} D^k f(0)\, x^k$$

C'est donc tout simplement le développement… **Il**limité de f. Attention à bien comprendre la différence de paradigme :

— Dans un DL, n est fixé et on fait tendre x vers 0.

— Dans un DSE, on calcule la somme à x fixé en faisant tendre n vers l'infini !

COROLLAIRE 5. *On obtient le DL à tout ordre d'une fonction somme d'une série entière par troncature.*

Attention ! il n'y a aucune garantie, pour une simple fonction $f \in \mathcal{C}^\infty$:

1. Que sa série de TAYLOR converge (qu'elle ait un rayon > 0).
2. Même si elle converge, que sa somme soit égale à f.

EXERCICE 7. *En admettant pour l'instant que cette fonction est $\mathcal{C}^\infty$, montrer en exprimant son DL que la série de* TAYLOR *de*

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+tx^2}\, dt$$

a un rayon de convergence nul.

Montrer que la fonction définie par $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ e^{-1/x^2} & \text{sinon} \end{cases}$ est $\mathcal{C}^\infty$, et que sa série de TAYLOR *est identiquement nulle !*

EXERCICE 8. *Montrer que $f : x \mapsto \sum_{n\geqslant 0} \dfrac{\cos(n^2 x)}{2^n}$ est $\mathcal{C}^\infty$. Vérifier que $f^{(2p)}(0) \geqslant \dfrac{p^{4p}}{2^p} = b_p$; montrer que la série $\sum b_p x^{2p}$ a un rayon de convergence nul et en déduire que f n'est pas somme de sa série de Taylor.*

DÉFINITION 7. *Une fonction $\mathcal{C}^\infty$ est dite **développable en série entière** sur l'intervalle $]-r, r[$ ssi :*

— *Sa série de* TAYLOR *a un rayon de convergence $R \geqslant r$.*

— *La fonction est égale à la somme de sa série de* TAYLOR *sur l'intervalle $]-r, r[$.*

Nous avons vu deux exemples qui prouvent que les fonctions DSE ne sont qu'une (toute) petite partie des fonctions $\mathcal{C}^\infty$.

COROLLAIRE (PRINCIPE D'IDENTIFICATION DES SÉRIES ENTIÈRES, OU PISE). *Une fonction a un unique DSE.*

Résulte de l'unicité du DST. En d'autres termes, deux fonctions DSE qui coïncident sur un (petit) intervalle ont forcément le même DSE. On applique cette propriété d'**injectivité du DSE** pour la résolution d'équations (différentielles), par exemple. Une autre application, dans le domaine des matrices :

Exemple : Comme on le démontre plus bas,

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \ldots = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n.$$

On en déduit par l'unicité du DSE que

$$\forall n \geqslant 2 \qquad \sum_{p+q=n} a_p a_q = 0$$

car $(\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n)^2 = \sum_{n\geqslant 0}(\sum_{p+q=n} a_p a_q)x^n = 1 + x + 0x^2 + \ldots 0x^n + \ldots$.
Soit maintenant M une matrice nilpotente, i.e. $M^n = 0$ pour n supérieur à un certain rang.
Posons $R = \sum_{n\geqslant 0} a_n M^n$: cette série converge puisque c'est en fait un polynôme. De plus,

$$R^2 = (\sum_{n\geqslant 0} a_n M^n)^2 = (I + \frac{1}{2}M + \ldots)^2 = I + M + \sum_{n\geqslant 2}(\sum_{p+q=n} a_p a_q)M^n = I + M + 0 = I + M,$$

et on a donc construit explicitement une racine carrée de la matrice $I + M$.[4]
Sans rentrer dans des détails très intéressants mais aussi fort délicats, observons que nous disposons de techniques puissantes pour obtenir des fonctions DSE à partir de fonctions connues : les théorèmes démontrés dans ce chapitre assurent en effet que combinaisons linéaires, produits, primitives, dérivées à tout ordre, de fonctions DSE, le sont encore. Hors-programme, on a aussi qu'inverses et composées de fonctions DSE le sont.

3 Les DSE indispensables

3°)a) Les DSE élémentaires

Nous ne connaissons vraiment que deux DSE :

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots \qquad \text{et} \qquad \exp z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots = \sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$$

et encore le deuxième n'est qu'une définition qui ne vous a peut être pas encore totalement convaincus. On peut en déduire de nombreux DSE utiles, par substitution ou dérivation :

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots + (-1)^n t^n + \ldots \qquad \frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \ldots \qquad \frac{1}{(1+t)^2} = 1 - 2t + 3t^2 - \ldots$$

et par intégration

PROPOSITION. *Pour* $t \in]-1,1[$ *on a le DSE :*

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{t^n}{n} + \ldots \qquad \ln(1-t) = -\sum_{n\geqslant 1}\frac{t^n}{n}.$$

Le DSE de $\ln(1-t)$ n'est pas explicitement au programme, mais il est plus facile à retenir.

EXERCICE 9.

- *Donner le DSE de* arctan.
- *Montrer que le DSE de* $\ln(1+t)$ *est encore valide pour* $t = 1$ *(on commencera par montrer que la série converge uniformément sur* $[0,1]$*). Idem pour celui de* arctan.
- *Donner une formule pour calculer* $\ln 2$ ***plus efficacement*** *que* $\sum(-1)^{n-1}/n$.

4. Par exemple, si $M^3 = 0$ on a $R = I + \frac{1}{2}M - \frac{1}{8}M^2$ et $R^2 = (I + \frac{1}{2}M - \frac{1}{8}M^2)^2 = I + M + (\frac{1}{4} - \frac{2}{8})M^2 + (\cdots = 0) = I + M$.

3°)b) DSE et équations différentielles

Prenons un $a \in \mathbb{C}$; par définition,

$$\exp(ta) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{t^n a^n}{n!}$$

On en déduit par le TITàT des séries entières que la dérivée de $\phi : t \mapsto \exp(ta)$ est $a \exp(ta)$. Donc ϕ est la solution de l'équation différentielle $\phi'(t) = a.\phi(t)$ qui vérifie $\phi(0) = 1$: on reconnaît et on en déduit

PROPOSITION.

$$e^{ta} = \exp(ta) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{a^n t^n}{n!}$$

En particulier, on a pour t réel

$$e^t = \sum_{n \geqslant 0} \frac{t^n}{n!} \qquad e^{-t} = \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \frac{t^n}{n!} \qquad e^{it} = \sum_{n \geqslant 0} i^n \frac{t^n}{n!} \qquad e^{-it} = \sum_{n \geqslant 0} (-i)^n \frac{t^n}{n!}$$

ce qui permet enfin de définir proprement les fonctions trigonométriques :

PROPOSITION. *Les fonctions* cos *et* sin *sont DSE, de rayon de convergence infini, et définies par*

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

On reconnaît bien évidemment les DL! de cos, sin, et exponentielle. La formule d'Euler $e^{it} = \cos t + i \sin t$ est donc le lien qui définit les fonctions trigonométriques à partir de l'exponentielle. On retrouve directement sur ces expression les propriétés

$$\cos' = -\sin \qquad \sin' = \cos \qquad \sin'' = -\sin \qquad \cos'' = -\cos \qquad \text{etc.} \ldots$$

Les expressions des fonctions hyperboliques sont plus simples :

$$\text{ch}\, t = \sum_{n \geqslant 0} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{sh}\, t = \sum_{n \geqslant 0} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

EXERCICE 10.

— *Montrer que* $\cos^2 t + \sin^2 t = 1 \ \forall t \in \mathbb{C}$. [5]
— *Vérifier que* $\cos it = \text{ch}\, t$, *calculer* $\sin it$ *en fonction de* $\text{sh}\, t$.
— *Retrouver à partir de* $\exp(a+b) = \exp a. \exp b$ *l'expression* $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$, *ainsi que la formule de* MOIVRE, *etc... toutes les formules trigo sont là dedans !*
— *Trouver les solutions* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *de* $\cos(a + ib) = 4/3$.
— *Montrer pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *la relation*

$$1 - \frac{t^2}{2!} \leqslant \cos t \leqslant 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!}.$$

— *Exprimer le produit de Cauchy des DSE de* $\sin t$ *et* $\cos t$ *et l'identifier au DSE de* $\sin 2t$ *pour en déduire une formule sur une somme de coefficients binomiaux.*

3°)c) DSE de $(1+t)^\alpha (\alpha \in \mathbb{R})$

Cette fonction apparaît comme une composée des précédentes : $(1+t)^\alpha = e^{\alpha \ln(1+t)}$. Faute de théorèmes sur les composées de DSE, [6] nous allons procéder différemment, par la *méthode de l'équation différentielle* qui a son intérêt propre dans de nombreuses situations.

LEMME 2. $t \mapsto (1+t)^\alpha$ *est l'unique solution de* $(1+t)y' = \alpha y$ *qui vaut 1 en 0.*

Évident (avec le théorème de structure des solutions de l'équation linéaire d'ordre 1).

DÉFINITION 8.

$$\binom{\alpha}{n} = \begin{cases} 1 & \textit{si } n = 0 \\ \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} & \textit{sinon} \end{cases}$$

est le ***coefficient binomial généralisé****.*
On retrouve les coefficients habituels quand $\alpha \in \mathbb{N}$*, avec en plus* $\binom{\alpha}{n} = 0$ *si* $n > \alpha$ *ce qui fait sens aussi d'un point de vue combinatoire !*

Parachutons maintenant la formule tant attendue (le vrai binôme de Newton) :

THÉORÈME 3. *(formule du binôme généralisée)*
On a pour tout $t \in]-1,1[$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \dots = \sum_{n \geqslant 0} \binom{\alpha}{n} t^n$$

C'est en fait la véritable formule publiée par Isaac Newton en 1685 (la formule à coefficients entiers était connue en Perse et en Arabie plusieurs siècles auparavant).

Démonstration. Nous allons utiliser une méthode d'intérêt général (cf. la propriété d'injectivité du DSE).
Supposons qu'il existe une fonction DSE $y = \sum_{n \geqslant 0} a_n t^n$ vérifiant les conditions du Lemme ci-dessus : alors $a_0 = y(0) = 1$ et

$$(1+t)y'(t) = (1+t)\sum_{n \geqslant 0}(n+1)a_{n+1}t^n = \sum_{n \geqslant 0}(n+1)a_{n+1}t^n + \sum_{n \geqslant 1} n a_n t^n = \alpha y(t) = \alpha \sum_{n \geqslant 0} a_n t^n$$

Par le principe d'identification des séries entières, il vient

$$\forall n \geqslant 0 \text{ (si si, même 0 !) } (n+1)a_{n+1} + n\, a_n = \alpha a_n \quad \Longleftrightarrow \quad a_{n+1} = \frac{\alpha - n}{n+1} a_n$$

ce qui prouve par récurrence que $a_n = \binom{\alpha}{n}$. Comme $\dfrac{a_{n+1}t^{n+1}}{a_n t^n} = t\dfrac{\alpha - n}{n+1} \to -t$, on a par le critère de D'ALEMBERT le rayon de convergence de la série qui vaut 1.
A posteriori, et cette étape est essentielle (car la série pourrait bien ne jamais converger !), ceci démontre que les calculs précédents ont un sens (sur l'intervalle $]-1,1[$), et que $f(t) = \sum a_n t^n$ est bien définie et vérifie les conditions du Lemme. On a donc bien trouvé le DSE de $t \mapsto (1+t)^\alpha$. ♦

6. Il existe mais c'est hors programme.

EXERCICE 11.

- *Simplifier le DSE de* $(1-t^2)^{-1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. *En déduire le DSE de la fonction* $\operatorname{Arc}\sin$.
- *Que se passe-t-il dans le DSE de* $(1+t)^\alpha$ *si* $\alpha \in \mathbb{N}$ *?*

III Fonctions trigonométriques - approfondissement hors-programme

En partant des définitions :

$$\sin t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \cos t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

on peut retrouver toutes les propriétés connues du nombre π et des fonctions trigonométriques usuelles. Les formules d'addition, etc, résultent de la nature de morphisme de l'exponentielle : $e^{i(a+b)} = e^{ia}.e^{ib}$.

1 Propriétés différentielles

En dérivant terme à terme il vient

THÉORÈME 4. *La dérivée de* sin *est* cos*, la dérivée de* cos *est* $-$sin.

On en déduit que $\sin, \cos$ sont bien les solutions de l'équation différentielle $y'' = -y$ et elles sont indépendantes (conditions initiales $(y(0), y'(0)) = (0, 1)$ ou $(1, 0)$).
La fonction cos est donc concave au voisinage de l'origine (sa valeur en 0 est un maximum) et la fonction sin est croissante près de 0 (pente voisine de 1).

2 Le nombre π

PROPOSITION. *Il existe un voisinage de 0 sur lequel* cos *est strictement positive.*

Ceci résulte de la continuité de la fonction cos puisque $\cos 0 = 1 > 0$.

PROPOSITION. *Soit* $A = \cup I \mid I$ *est tout intervalle ouvert contenant 0 où* cos *est strictement positive ; alors* A *est un intervalle.*

En effet c'est une réunion d'intervalles (non vides) qui contiennent un point commun.

PROPOSITION. $\operatorname{Sup} A < +\infty$.

Raisonnons par l'absurde : si $\cos > 0$ sur $]0, +\infty$ (on oublie qu'on CROÎT connaître cos, pour l'instant !) alors la fonction sin est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
En particulier on aura pour $t \geqslant \varepsilon$ $\sin t \geqslant \sin \varepsilon > 0$. Intégrons cette relation pour un $x \geqslant \varepsilon$:

$$\cos \varepsilon - \cos t = \int_{\varepsilon}^{x} \sin t \, dt \geqslant \int_{\varepsilon}^{x} \sin \varepsilon \, dt = (x - \varepsilon) \sin \varepsilon$$

On en déduit que pour $x \geqslant \varepsilon$

$$\cos x \leqslant \cos \varepsilon + \varepsilon \sin \varepsilon - x \sin \varepsilon$$

ce qui fait tendre cos vers $-\infty$, ce qui contredit le fait que $-1 \leqslant \cos \leqslant 1$.

DÉFINITION 9. *On pose* $\alpha = \operatorname{Sup} A = \pi/2$ *et* $\pi = 2\alpha$. α *est alors la plus petite racine (positive) de la fonction* cos.

Pour les sceptiques : il est clair que $\cos \pi/2$ ne peut plus guère être > 0 (sinon cos resterait > 0 dans un voisinage de $\pi/2$ et on pourrait étendre A plus à droite) mais ne peut non plus être < 0 (cos est continue, mais juste à gauche de $\pi/2$ elle est > 0).

PROPOSITION. $\cos \pi/2 = 0$, $\sin \pi/2 = 1$, $e^{i\pi/2} = i$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{2i\pi} = 1$.
En conséquence les fonctions $\cos, \sin, t \mapsto e^{it}$ *sont* $2\pi-$*périodiques.*

De $\cos^2 + \sin^2 = 1$ et du fait que sin est positif dans le secteur (car croissante entre 0 et

$\pi/2$, sa dérivée y étant positive), on déduit que $\sin \pi/2 = +1$ puis $e^{i\pi/2} = 0 + 1i = i$. On passe à $e^{i\pi} = -1$ par la formule de DE MOIVRE (ici on met au carré !), et de même à $e^{2i\pi} = 1$. Cette dernière égalité prouve que

$$e^{i(x+2\pi)} = e^{ix}.e^{2\pi} = e^{ix}$$

d'où les périodicités annoncées. En bonus on a les célèbres $\sin(t + \pi/2) = \cos t$ *et alii* :

$$\cos(t + \pi/2) + i \sin(t + \pi/2) = e^{i(t+\pi/2)} = i(\cos t + i \sin t) = -\sin t + i \cos t$$

qui montre que les courbes de $\cos, \sin$ sont décalées d'un quart de période (leurs parités résultent de l'écriture en série entière, et la périodicité résulte de la démonstration ci-dessus).
Enfin le nombre π est bien ce que l'on pense, comme on le voit par exemple en calculant le périmètre d'un cercle de rayon unité !