Dérivation des fonctions vectorielles

par
Emmanuel AMIOT

11 mars 2020

On va généraliser ce que l'on avait appris en Sup sur les dérivées des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, à des applications ayant toujours une variable réelle mais un espace image plus grand (un evn de dimension finie) ; et l'appliquer à quelques propriétés des arcs paramétrés.

1 Dérivée en un point

1.1 Définitions

Comme en Sup, on considère la limite du taux d'accroissement :

DÉFINITION 1. *On dit que f, définie de I, intervalle de $\mathbb{R}$, dans l'evn de dimension finie F, est dérivable au point $a \in I$ ssi le taux d'accroissement*

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

admet une limite quand $h \to 0$ ($h \neq 0$). Cette limite est appelée le vecteur dérivé *de f en a, et se note $f'(a)$.*

On définit de même les dérivées à droite et à gauche, quand le taux d'accroissement admet une limite à droite ou une limite à gauche.

EXERCICE 1. *Que dire quand les dérivées à droite et à gauche existent et sont égales ? Et (quand une fonction f est bien définie au point a) f peut-elle avoir deux limites distinctes à gauche et à droite ?*

Cette notion de dérivée est exactement celle de vitesse instantanée, limite de la vitesse moyenne (= taux d'accroissement), ou encore rapport d'un déplacement infinitésimal à l'intervalle de temps infinitésimal pendant lequel il se déroule [1]. Graphiquement, le vecteur dérivée donne – s'il est non nul ! – la direction de la tangente à la courbe paramétrée par $t \mapsto f(t)$, c'est à dire la limite des cordes i.e. des droites joignant $f(a)$ à $f(a+h)$. On creusera cet aspect dans l'étude des arcs paramètrés.

REMARQUE 1. *On peut avoir des dérivées à droite et à gauche sans que la fonction ne soit dérivable, ex. $t \mapsto |t|$.*

Il existe une définition concurrente, tout aussi naturelle :

DÉFINITION 2. *Si f s'écrit $f = f_1 e_1 + \dots f_n e_n$ i.e. a les composantes $(f_1, \dots f_n)$ dans la base $\mathcal{B} = (e_1 \dots e_n)$ de E, alors f est dérivable ssi toutes les f_i le sont, et $f' = (f'_1, \dots f'_n)$.*

Nous verrons très vite que ces définitions sont bien équivalentes. L'inconvénient de la seconde est qu'elle semble dépendre du choix d'une base. . . cf. infra.

DÉFINITION 3. *On dira que f est* dérivable *sur I si f est dérivable en tout point de I.*

Ce qui fait de la dérivabilité une propriété *locale*, qui ne dépend pas de l'intervalle dans son en-

1. Historiquement, on considère que la physique moderne est née quand Galilée, contemporain de Cavalieri et de sa théorie des "indivisibles", a commencé à dépasser la notion néo-Aristotélicienne du mouvement conçu comme une succession d'états de repos, et quelques autres vieilleries, au profit de la notion de vitesse instantanée. C'est un moment passionnant de l'histoire de la pensée. Et un concept pas évident.

semble mais qui se vérifie seulement au voisinage de chaque point ;

1.1.1 Espace $\mathcal{C}^1(I, F)$.

Dans ces conditions, on dispose d'une application dérivée, notée f', ou Df, ou encore $\frac{df}{dx}$, qui à tout point associe le vecteur dérivée de f en ce point.
Dans la pratique, on ne se contentera pas de la dérivabilité. En particulier, pour pouvoir intégrer les dérivées sans états d'âme, on leur demandera d'être continues. En effet, une fonction comme $x \mapsto x^2 \sin(1/x)$ a une dérivée en tout point mais celle-ci n'est pas continue. Ce qui justifie la

DÉFINITION 4. $f : I \to F$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *si* f *est dérivable et* f' *est continue sur* I.

Les espaces de fonctions continues (resp. dérivables) étant des espaces vectoriels, on a

PROPOSITION. *L'ensemble* $\mathcal{C}^1(I, F)$ *des applications de classe* $\mathcal{C}^1$ *de* I *dans* F *est un sous-espace vectoriel de* F^I.

***Exemple (Hélice circulaire)*:**

$$D\begin{pmatrix} a\cos t \\ a\sin t \\ kt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos t \\ a\sin t \\ kt \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ a\cos t \\ k \end{pmatrix}.$$

Ce qui prouve que la pente d'une hélice circulaire avec l'horizontale est constante.

1.2 Propriétés de la dérivation

1.2.1 Dérivée et DL

Le plus important est peut-être l'équivalence entre dérivée et développement limité à l'ordre 1, c'est à dire que la dérivabilité en un point permet d'approcher la fonction par une fonction affine (d'où l'interprétation géométrique de la tangente) :

PROPOSITION. f *est dérivable en* $a \iff$ *on a un DL en* a *à l'ordre 1 :*

$$\exists \ell \quad f(x) = f(a) + (x - a).\ell + o(x - a)$$

EXERCICE 2. *Est-ce encore vrai pour la dérivée seconde ?*

PROPOSITION. *Une application dérivable est continue.*

En effet on a par le DL $f(a + h) = f(a) + hf'(a) + o(h) \to f(a)$. L'exemple de $|t|$ suffit à prouver que la réciproque est fausse. $t \mapsto \sqrt{|t|}$ en est un autre. Cette propriété est moins élémentaire qu'elle n'en a l'air : par exemple, certains parmi les meilleurs mathématiciens ont longtemps cru qu'une application continue était nécessairement dérivable, sauf en quelques points. Il a fallu attendre la fin du XIX^e siècle pour voir des exemples de fonctions continues n'admettant nulle part de dérivée. [2]

1.2.2 Dérivée et linéarité

Dériver est une opération linéaire, comme de prendre un taux d'accroissement ou de passer à la limite. En particulier,

PROPOSITION. *Soient* f, g *de* I *dans* F *et* λ, μ *deux scalaires. Si* f *et* g *sont dérivables (en* a*, sur* I*), alors* $\lambda f + \mu g$ *aussi et sa dérivée (en* a*, sur* I*) est* $\lambda f' + \mu g'$

Démonstration immédiate par l'une ou l'autre définition.
Dérivée de $u(f)$, de $B(f, g)$.
La linéarité joue même dans des cas plus complexes. Considérons par exemple une application linéaire u de F dans G : le taux d'accroissement en a de $u \circ f$ est

$$\frac{u \circ f(a + h) - u \circ f(a)}{h} = u\left(\frac{f(a + h) - f(a)}{h}\right) \qquad \text{par linéarité}$$

2. Cantor, Péano, Weierstrass ; par exemple $f(x) = \sum_{n \geqslant 0} \cos(9^n x)/2^n$.

Comme u est continue, on en déduit

PROPOSITION. *Si* f *est dérivable, alors* $u \circ f$ *aussi et*

$$(u \circ f)' = u \circ f'.$$

Un cas particulier très utile sera développé au paragraphe suivant : quand u est la projection sur un axe de coordonnées. Avant cela, généralisons la proposition aux applications *BI*-linéaires :

THÉORÈME 1. *Soit* B *une application bilinéaire de* $F \times G$ *dans* E*,* f *et* g *deux applications de* I *dans* F *et de* I *dans* G *respectivement, dérivables [en* $a \in I$*, sur* I *entier]. Alors* $B(f, g)$ *est aussi dérivable, et*

$$B(f, g)' = B(f', g) + B(f, g').$$

Ce qui signifie, dans divers contextes, que le produit de deux applications dérivables est encore dérivable. On comprendra mieux la portée de cette proposition sur un exemple :

DÉRIVÉE DU PRODUIT SCALAIRE.

Dans un espace euclidien (ou préhilbertien) F*, on a une application bilinéaire par excellence qui est le produit scalaire. Si* f *et* g *sont deux applications dérivables à valeurs dans* F*, la dérivée de* $\langle f \,|\, g \rangle$ *est* $\langle f' \,|\, g \rangle + \langle f \,|\, g' \rangle$*.*

En particulier, la dérivée de $\|f\|^2 = \langle f \,|\, f \rangle$ *est* $2\langle f' \,|\, f \rangle$*, et il en résulte*

PROPOSITION.

Si f *est une application dérivable* de norme constante *dans l'espace euclidien* E*, on a* $f' \perp f$ *(la dérivée est orthoradiale).*

Il en serait de même pour la dérivée d'un produit vectoriel, d'un produit matrice $\times$ *vecteur colonne, de la composée de deux endomorphismes, etc. . .*

Dérivation de $B(f, g)$*.* Le plus lisible est d'utiliser les DL à l'ordre 1 : par hypothèse,

$$f(a + h) = f(a) + h.f'(a) + o(h) \qquad g(a + h) = g(a) + h.g'(a) + o(h)$$

On en déduit grâce à la bilinéarité de B

$$\begin{aligned} B(f(a + h), g(a + h)) &= B(f(a) + h.f'(a) + o(h), g(a) + h.g'(a) + o(h)) \\ &= B(f(a), g(a)) + h.B(f'(a), g(a)) + h.B(f(a), g'(a)) + o(h) \end{aligned}$$

Tous les derniers termes sont ramassés en un même $o(h)$ grâce à la continuité de B : par exemple, un terme comme $B(f(a), o(h))$ tend vers 0 plus vite que h puisque $o(h) = h.\varepsilon(h)$ où $\varepsilon(h) \to 0$.
On a établi que la dérivée de $B(f, g)$ en a existe et vaut $B(f'(a), g(a)) + B(f(a), g'(a))$, cqfd. ♦

EXERCICE 3. *On considère une application* f *de classe* $\mathcal{C}^1$ *de l'intervalle* I *dans le cercle unité de* $\mathbb{C}$*. Montrer que* $\overline{f}.f'$ *est imaginaire pur. * Montrer qu'il existe une application de classe* $\mathcal{C}^1$ $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que* $f(t) = e^{i\theta(t)}$ *(théorème de relèvement).*

1.3 Extension des propriétés des fonctions à valeurs réelles

1.3.1 Dérivée et composantes.

On rapporte l'espace d'arrivée E à une base $(e_1, \dots, e_n)$ c'est à dire que l'on considère les *composantes* de f : $f = (f_1, \dots, f_n)$ ie $f(x) = f_1(x).e_1 + \dots + f_n(x).e_n$.
En utilisant d'une part, la dérivée de $u \circ f$ quand u est la projection sur une forme coordonnée (Prop. 1.2.2), et d'autre part la dérivée d'une combinaison linéaire, on obtient :

PROPOSITION. f *est dérivable (resp.* $\mathcal{C}^1$*) ssi toutes ses composantes le sont. Dans ce cas, les composantes de la dérivée sont les dérivées des composantes :*

$$f' = (f_1', \dots, f_n')$$

On a bien montré l'équivalence des deux définitions de la dérivée vectorielle. En particulier quand E est le plan vectoriel $\mathbb{C}$ sur le corps $\mathbb{R}$, on a

$$Df = D(\operatorname{Re} f) + iD(\operatorname{Im} f) \qquad \overline{Df} = D\overline{f}$$

et f est dérivable ssi ses parties réelles et imaginaires le sont (ou encore si sa conjuguée l'est).

2 Intégrales

2.1 Définition par les composantes

Sur un segment $I = [a, b]$, on définit l'intégrale d'une fonction vectorielle $f : I \mapsto F$ en prenant une base et en intégrant les composantes :

$$\int_a^b f = \int_a^b \sum f_i e_i = \sum \left(\int_a^b f_i \right) e_i$$

(les sommes sont finies). Il faut certes vérifier que cela ne dépend pas du choix de la base, or un changement de base est une application linéaire et on a vu qu'elles « commutent » avec la dérivation (Prop. 1.2.2), il en est de même avec l'intégration. On peut alors étendre sans douleur et quasiment sans calculs les propriétés déjà connues :

PROPOSITION. *Intégrer est linéaire :*

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

Si $c \in]a, b[$ *alors*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \text{ (relation de Chasles).}$$

Cela signifie même qu'on peut revenir à la source, à la définition de l'intégrale (des fonctions à valeurs réelles) par les fonctions en escalier ou encore aux sommes de Riemann :

PROPOSITION. *Pour une fonction* f *continue (par morceaux) de* $[a, b]$ *dans* E*, on a si on subdivise* $[a, b]$ *en* $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots a_n = b$*, avec* $a_{i+1} - a_i = \dfrac{b-a}{n}$*, l'expression*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(a_i) \to \frac{1}{b-a} \int_a^b f$$

(de même avec $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(a_i)$ *– et même avec des subdivisions inégales si elles sont suffisamment régulières).*

En partant de la relation précédente, on en déduit par passage à la limite que la formule suivante est encore valide :

COROLLAIRE 1. *Intégrer est une une application linéaire continue : pour tout fonction* f *continue (par morceaux) de* $[a, b]$ *dans* E*, en de dimension finie, pour toute norme, on a*

$$\left\| \int_a^b f \right\| \leqslant \int_a^b \|f\|.$$

Il est parfois utile d'expliciter un corollaire moins précis :

PROPOSITION (FORMULE DE LA MOYENNE).

Soit M *le sup de* $\|f\|$ *sur* $[a, b]$*, alors*

$$\left\| \int_a^b f \right\| \leqslant M(b-a).$$

2.2 Formule fondamentale de l'analyse

2.2.1 Dérivées et intégrales

Une application très importante : on conserve la « formule fondamentale de l'analyse ».

THÉORÈME 2. *Si* f *est* $\mathcal{C}^1$ *sur* I *alors pour tous* $a, b \in I$ *on a*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'$$

puisqu'elle est vraie pour chaque composante de f.
Autrement dit on a la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 (!) :

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt = f(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^0}{0!}.f'(t)\,dt.$$

Attention ! La seule dérivabilité de f ne suffirait pas pour écrire cette formule (est-ce que f' est intégrable ?...) Donnons une application utile de la formule fondamentale de l'analyse :

2.2.2 Théorème de la dérivée prolongée

L'exemple de la fonction

$$x \mapsto x^2 \ \sin\frac{1}{x} \qquad 0 \mapsto 0$$

montre clairement que la convergence de la dérivée (i.e. de $f'(x)$ quand $x \to 0$) n'est pas nécessaire pour la dérivabilité. Normal : dérivable ne signifie pas forcément $\mathcal{C}^1$! Une dérivée peut *exister* sans pour autant *être continue.*
Mais on a un embryon de réciproque (adhérence du programme mais pratique) :

THÉORÈME DE LA DÉRIVÉE PROLONGÉE.

Soit f *une application continue de* $[a, b]$ *dans* E, *de classe* $\mathcal{C}^1$ *(resp. dérivable) sur* $[a, b] \setminus c$ *et telle que* f' *admette une limite* ℓ *au point* c.
Alors f *est dérivable en* c *et*

$$f'(c) = \lim_{x \to c} f'(x) = \ell.$$

Démonstration. On pose $g(x) = f(c) + \int_c^x f'$, qui est parfaitement définie puisque, par hypothèse, f' se prolonge en une fonction continue sur $[c, x]$ pour $x \in [a, b]$. La fonction g est $\mathcal{C}^1$, et $D(g - f)$ est identiquement nulle sur l'intérieur (au moins) de l'intervalle $[c, x]$, avec $g - f$ continue : donc $g = f$ et f est $\mathcal{C}^1$! ♦

Typiquement, on peut citer l'exemple de la fonction

$$0 \mapsto 0 \qquad x \neq 0 \mapsto e^{-1/x^2}$$

qui est en fait $\mathcal{C}^\infty$, de série de TAYLOR nulle en 0 (l'archétype de la fonction NON DSE).

EXERCICE 4. *Montrer que cette fonction est effectivement* $\mathcal{C}^\infty$, *de série de* TAYLOR *nulle en 0 (prouver par récurrence que sa dérivée* $n^{\text{ème}}$, *hors 0, est de la forme* $\dfrac{P_n(x)}{x^{3n}}e^{-x^2}$ *avec* $P_n \in \mathbb{R}[X]$*).*
En déduire qu'il existe des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$, *nulles en dehors de* $]0, 1[$ *et non nulles dedans (fonctions à support compact).*

2.2.3 Majorer la dérivée sur un intervalle

Une propriété fondamentale :

THÉORÈME 4. *Soit* f *une application dérivable sur l'intérieur de* I*, continue sur* I*. Alors*

$$f \textit{ est constante sur } I \iff f' \textit{ est identiquement nulle.}$$

DÉFINITION 5. *C'est vrai pour les composantes de* f *(cours de Sup), donc pour* f*.*

Cette propriété résulterait aussi de

THÉORÈME (INÉGALITÉ DES ACCROISSEMENTS FINIS).
Soit f *de classe* $\mathcal{C}^1$ *d'un intervalle* I *à valeurs dans* E*, telle que* $\|Df\| \leqslant M \in \mathbb{R}$ *sur* I *; alors pour tout segment* $[x, y] \subset I$

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant M|x - y|$$

qui remplace le *théorème* des accroissements finis, lequel n'est plus vrai en dimension > 1.

Démonstration. Avec l'hypothèse $\mathcal{C}^1$ c'est facile : on a (mettons que $y \leqslant x$ pour fixer les idées)

$$\|f(x) - f(y)\| = \left\| \int_y^x f' \right\| \leqslant \int_y^x \|f'\| \leqslant \int_y^x M = M(x - y)$$

Notez que l'on n'a pas précisé quelle norme était considérée : c'est vrai pour toutes.
On pourrait aussi appliquer la formule de la moyenne à la FFdA. C'est ce qu'on a fait en fait. ♦

EXERCICE 5. *Avec l'application* $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ *montrer que le TAF n'a plus lieu.*

2.2.4 Théorèmes d'interversion

Les théorèmes sur les suites et séries de fonctions, vus pour des fonctions à valeurs réelles, restent vrais sans modification pour les fonctions vectorielles. Par exemple, si une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ (f_n) converge simplement sur I et si la suite (f'_n) converge uniformément sur (tout compact) de I alors $\lim f_n = f$ est $\mathcal{C}^1$ et $f' = \lim f'_n$. De même, la convergence de la série des normes $\sum \|f_n(t)\|$, à t fixé, entraîne la convergence de $\sum f_n(t)$, et la convergence de la série des sups (convergence normale) entraîne la convergence uniforme.
On pourrait même généraliser les théorèmes 2.0 (avec des hypothèses de domination).

3 Classe $\mathcal{C}^k$

3.1 Définition

Puisque Df est une application du même genre que f – définie de I dans F – il peut advenir que Df soit, elle aussi, dérivable : sa dérivée $D(Df)$ sera notée $D^2 f$, ou encore f'', ou même $\frac{d^2 f}{dx^2}$. Plus généralement, on définit par récurrence la dérivée $k^{\text{ième}}$ de f et

DÉFINITION 6.

- *La dérivée* $k^{\text{ième}}$ *de* f *est la dérivée de la dérivée* $(k-1)^{\text{ième}}$ *de* f *(quand elle existe).*
- f *est de classe* $\mathcal{C}^k$ *si les* k *premières dérivées de* f *existent* et sont continues*, c'est à dire si* $D^k f = f^{(k)} = \frac{d^k f}{dx^k}$ *existe et est continue.*
- f *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *si* f *est de classe* $\mathcal{C}^k$ *pour tout entier* k*.*

Noter le cas particulier $k = 0$: $D^0 f = f^{(0)} = f$, et donc être de classe $\mathcal{C}^0$ signifie être continue.
Vous connaissez bien la dérivée seconde, qui est cinématiquement l'accélération (cf. PFD).

3.2 Propriétés

Comme pour la classe $\mathcal{C}^1$, on a

PROPOSITION. *L'ensemble* $\mathcal{C}^k(I, F)$ *est un sous-espace vectoriel de* F^I*.*

Il est plus amusant d'essayer de dériver k fois un produit,[3] en réitérant le théorème 1. Allons-y

3. Que ce soit quand f et g sont à valeurs numériques, ou pour un produit scalaire, matriciel, vectoriel. . . en fait pour toute combinaison bilinéaire $B(f, g)$ notée comme un produit.

par étapes :

$$\begin{aligned}(f.g)' &= f'.g + f.g' \\ (f.g)'' = (f'.g+f.g')' &= f''.g + f'.g' \ + f'.g' + f.g'' = f''.g + 2f'.g' + f.g'' \\ (f.g)''' = (f''.g+2f'.g'+f.g'')' &= f'''.g + 3f''.g' + 3f'.g'' + f.g'''\end{aligned}$$

On reconnait le triangle de Pascal, et on démontre par la même récurrence que pour la formule du binôme la

PROPOSITION (FORMULE DE LEIBNIZ).
Si f et g appartiennent à $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{C})$, il en est de même de $f.g$ et

$$D^k\ f.g = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} D^n\ f.D^{k-j}\ g$$

EXERCICE 6. *On considère trois entiers a, b, n non nuls et on définit le polynôme P par*

$$P(x) = (x.(bx - a))^n$$

Montrer que toutes les dérivées de P en 0 et en a/b sont entières. Lesquelles sont nulles ?

EXERCICE 7. *Calculer les valeurs en $0, \pm 1$, de $L_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!} D^n((x^2-1)^n)$.*

EXERCICE 8. *On considère l'endomorphisme D de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$. En appliquant hardiment le théorème des noyaux, résoudre l'équation différentielle*

$$y'' - (a+b)y' + ab\,y = (D - a\,\mathrm{id}) \circ (D - b\,\mathrm{id})(y) = 0$$

où a, b sont des constantes complexes (distinctes).

3.3 Formules de Taylor

On étend sans difficulté (composante par composante) les formules de Taylor étudiées dans le cas des fonctions à valeurs réelles. Rappelons que la formule de Taylor-Young est *locale* (elle fait sens quand $h \to 0$ et donne un développement limité), les deux autres sont globales (valables sur tout un intervalle).

PROPOSITION (FORMULE DE TAYLOR-YOUNG).
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ dans un voisinage de a. Alors

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \dots \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + o(h^n)$$

où $o(h^n) = h^n \varepsilon(h)$ est comme d'habitude une fonction telle que $o(h^n)/h^n \to 0$ quand $h \to 0$.

Démonstration. Il suffit d'écrire la formule pour chaque composante $f_1 \dots f_p$ de f :

$$f_i(a+h) = f_i(a) + hf_i'(a) + \dots \frac{h^n}{n!} f_i^{(n)}(a) + o(h^n)$$

de multiplier par les vecteurs de base e_i et d'additionner, car la somme de p termes en $o(h^n)$ (p fixé) est encore un $o(h^n)$. ♦

De même on a

PROPOSITION (FORMULE DE TAYLOR AVEC RESTE INTÉGRAL).

Soit f *une fonction de classe* $\mathcal{C}^{n+1}$ *dans* $I \ni a$. *Alors* $\forall x \in I$,

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \dots \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

On peut aussi redémontrer directement cette formule par récurrence sur n et intégration par parties. On a déjà vu l'initialisation pour $n = 0$ (FFdA).
Enfin on déduit de la précédente que

PROPOSITION (INÉGALITÉ DE TAYLOR-LAGRANGE).

Soit f *une fonction de classe* $\mathcal{C}^{n+1}$ *dans* I *et* M *un majorant de* $\|f^{(n+1)}\|$ *sur* I. *Alors*

$$\left\| f(x) - \left(f(a) + (x-a)f'(a) + \dots \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \right) \right\| \leqslant \frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

qui donne une mesure globale de l'erreur commise en remplaçant f par son *polynôme de Taylor*, et permet de donner une estimation en $O((x-a)^{n+1})$ au lieu du $o((x-a)^n)$ de Taylor-Young. Ce type de majoration est bien préférable pour par exemple l'étude des séries numériques (un $O(1/n^2)$ plutôt qu'un $o(1/n)$, vous ne préférez pas ? :))

4 Arcs paramétrés

On en fait une étude extrêmement sommaire. Les techniques d'étude et de racé sont hors-programme, les calculatrices graphiques font cela pour nous (jusqu'à un certain point) (soupir).

Introduction – rappels historiques.

On commence un cours sur la notion de « courbe ». Il faut bien comprendre que cette notion est obscure : elle n'a pas de définition totalement satisfaisante, et le concept même de courbe a subi dans son histoire des modifications importantes.
Pour les Grecs, une courbe est un objet doué de longueur, mais sans épaisseur. On peut y voir, sans doute abusivement, une idée d'un objet de dimension intrinsèquement égale à 1.
À l'âge classique, après la découverte de la puissance du calcul algébrique, les courbes étaient essentiellement ce que nous appelons de nos jours des « courbes algébriques », c'est à dire définies par une équation $F(x, y) = 0$ où F est polynômiale. Leur étude était envisagée sous l'angle de calculs algébriques, ce qui a permis d'établir des résultats bien plus puissants que les pures méthodes géométriques des Anciens. Par ailleurs les débuts du calcul intégral et du calcul différentiel permettent d'atteindre des résultats inconcevables pour les grecs (sauf exceptions remarquables), comme la surface délimitée par une courbe, ou sa longueur.
Comment relier l'une ou l'autre de ces notions à l'Analyse (qui devient rigoureuse au XIXième siècle) ? La notion grecque, tout comme l'idée naturelle qu'une courbe délimite un intérieur et un extérieur, en prennent un coup quand Péano donne le premier exemple[4] d'une « courbe » qui remplit le carré $[0, 1] \times [0, 1]$!
Nous allons nous prémunir contre de tels monstres à la façon mathématicienne, c'est à dire en choisissant un cadre un peu restrictif qui les exclura. L'idée de base est la cinématique : on va définir les courbes comme trajectoires de certains mouvements. Le prix à payer n'est pas seulement d'exclure quelques beaux objets (fractales...) , il y a quelques efforts à faire pour vérifier que la trajectoire ne dépend pas trop de la façon dont on la parcoure.

4.1 Arc paramétré

Tout ce qui suit se place dans un espace vectoriel E de dimension finie : par choix d'une base, on pourra si nécessaire l'identifier à $\mathbb{R}^n$. Comme tout espace vectoriel, c'est un espace affine (les points sont les « extrémités » des vecteurs).

4. C'est une application continue **surjective** de $[0, 1]$ dans le carré.

DÉFINITION 7. *On appelle* arc paramétré *une application* $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{E}$ *(espace affine). Son image s'appelle le* support *de l'arc.*

C'est un peu, mais comme on va le voir, pas totalement, la notion de courbe.
On se limite à des arcs dérivables (et même $\mathcal{C}^1$), pour éviter des courbes affreuses (genre qui remplissent le carré).
Interprétation cinématique : f décrit le mouvement d'un point en fonction du temps t (la position est $f(t)$ au temps t) et le support est la trajectoire. f' sera la vitesse, et f'' l'accélération.
Que se passe-t-il si on change de variable? Posons $M(t) = M(\varphi(u)) = N(u)$. Alors les points de la forme $M(t)$ sont exactement les mêmes que les $N(u)$ (les images de M et N sont identiques). Cependant, si on dérive :

$$N'(u) = \frac{dN(u)}{du} = \frac{dM(\varphi(u)}{du} = \varphi'(u).M'(\varphi(u)) = \varphi'(u).M'(t)$$

On a donc multiplié le vecteur dérivée par un scalaire, $\varphi'(u)$. Pour la réversibilité du changement de variable, on impose que φ' ne s'annule jamais.
Le vecteur dérivé (s'il est non nul lui-même) reste donc sur une même droite *quand on change de paramètre. Il peut changer de longueur, mais aussi de sens, c'est à dire de sens de parcours de la courbe – on peut définir deux orientations sur une courbe.*

EXERCICE 9. *Trouver les* points doubles *de* $\begin{cases} x &= \sin 2t \\ y &= \sin 3t \end{cases}$ *en la traçant à l'ordi (voire à la calculette).*

Trouver une équation de cette courbe (une relation satisfaite par tous les couples (x, y) *qui la parcourent).*

REMARQUE 2. *Parfois une courbe est donnée par une équation et non une paramétrisation. Si c'est* $y = x^2$ *ce n'est pas un problème : on étudie la fonction* $x \mapsto x^2$ *! (ce qui revient à considérer une paramétrisation* $\begin{cases} x &= t \\ y &= t^2 \end{cases}$ *! Une telle paramétrisation est dite* cartésienne*.)*

Cela peut être plus compliqué : ainsi l'ellipse $4x^2+9y^2 = 900$ *peut se paramétrer par* $\begin{cases} x &= 15\cos t \\ y &= 10\sin t \end{cases}$ *– entre autres. Parfois il n'existe pas de paramétrisation simple. On se contentera de traiter les cas qui nous sont accessibles.*

EXERCICE 10. *Paramétrer l'hyperbole équilatère* $x^2 - y^2 = 1$ *et en déduire qu'elle a deux composantes connexes par arc.*

4.2 Tangente

DÉFINITION 8. *On dit que le point* $M = f(t)$ *est* régulier *ssi* $f'(t) \neq \vec{0}$*. Dans ce cas, on a la tangente en* M *qui est la droite* $M + \mathbb{R}.f'(t)$.

PROPOSITION. *Ces deux notions ne dépendent pas de la paramétrisation choisie.*

EXERCICE 11. *Montrer que la tangente à* $\begin{cases} x &= \cos^3 t \\ y &= \sin^3 t \\ z &= \frac{3}{4}\cos 2t \end{cases}$ *fait un angle constant avec la verticale.*

Dans le cas d'une paramétrisation qui est dérivable à droite et à gauche, mais pas dérivable tout court, on peut avoir affaire à deux demi-tangentes.

EXERCICE 12. *Tracer* $\begin{cases} x = |t| + t^2 \\ y = t + t^3 \end{cases}$ *au voisinage de* $t = 0$.

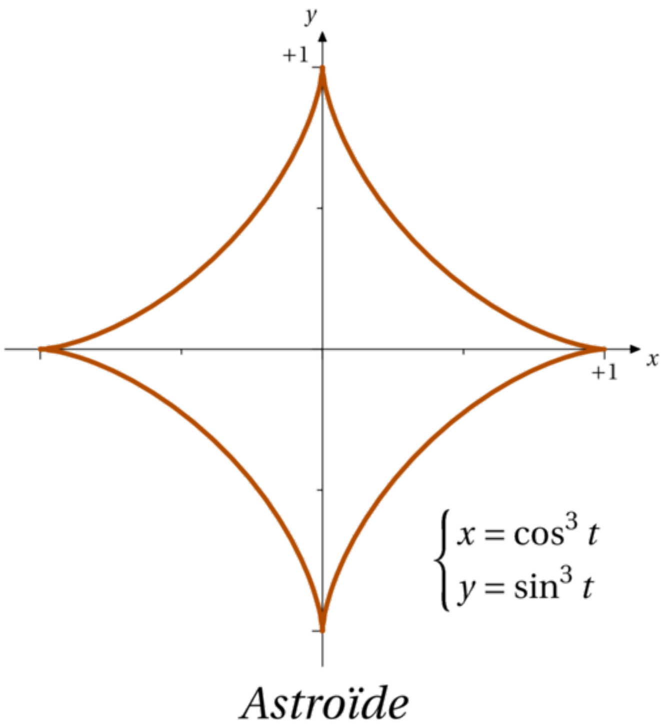

FIGURE 1 – Qu'elle est belle !

On a au voisinage d'un point régulier M le DL suivant :

$$f(t+h) = f(t) + h.f'(t) + o(h)$$

ce qui prouve que la tangente est la droite la plus proche (en un sens que l'on pourrait préciser. . .) de la courbe. C'est aussi (exo facile) la limite des sécantes $(M(t)M(t+h))$. [5]

REMARQUE 3. *L'étude des points non réguliers (dits « points stationnaires », puisque la vitesse y est nulle !) est hors-programme. En général ils ont un aspect « pointu », on en verra quelques exemples grâce à l'ordinateur.*

Exemple : Étudions l'astroïde $\begin{cases} x &= \cos^3 t \\ y &= \sin^3 t \end{cases}$. Comme les fonctions x, y de t sont $2\pi-$périodiques il suffit de tracer la courbe pour $t \in [-\pi, \pi]$. Par ailleurs il y a des symétries : $(x(-t), y(-t)) = (x(t), -y(t))$ donne une symétrie par rapport à (Ox), on trouve aussi une symétrie centrale en passant de t à $t+\pi$, et la composée des deux est la symétrie par rapport à (Oy). Finalement un quart de la courbe (pour $t \in [0, \pi/2]$ par exemple) suffit à en tracer la totalité. En fait il y a aussi une symétrie par rapport à $(y = x)$ (et par composition aussi par rapport à l'autre bissectrice) et même une invariance par rotation de $\pi/2$ même si cela saute moins aux yeux.
Pour $t \in]0, \pi/2[$ l'arc est régulier, x décroît de la valeur a à la valeur 0 et y fait l'inverse. Pour préciser le tracé il reste à étudier le comportement au voisinage de $t = 0$.
Un DL donne $\begin{cases} x &= 1 - t^2/2 + o(t^2) \\ y &= t^3 + o(t^3) \end{cases}$ i.e. $(2(1-x))^3 \sim y^2$ ou encore $y \sim \pm\sqrt{2(1-x)^3} = \sqrt{2}u^{3/2}$ que l'on sait tracer.

5. À l'époque de FERMAT, DESCARTES, PASCAL, on parlait de « touchantes ». N'est-ce pas touchant ?

EXERCICE 13. *Esquisser le tracé, plus compliqué, de* l'hypocycloïde à trois rebroussements, *enveloppe des droites de Simson d'un triangle (!)* $\begin{cases} x &= 4\cos t - \cos 4t \\ y &= 4\sin t - \sin 4t \end{cases}$.
Elle a trois points stationnaires... Montrer qu'elle est invariante par rotation de $2\pi/3$ *en posant* $z = x + iy$.

REMARQUE 4. *Il est facile d'écrire une équation de la tangente à un arc paramétré (en un point régulier). C'est aussi l'objectif majeur de ce chapitre ! Une méthode consiste à retenir que la pente, constante, est* y'/x'*, on a donc*

$$\frac{Y - y(t)}{X - x(t)} = \frac{y'(t)}{x'(t)} \quad \text{i.e.} \quad Y = \frac{y'(t)}{x'(t)}(X - x(t)) + y(t)$$

Attention ! sur la droite ce sont X, Y *qui changent, les valeurs* $x(t) \dots y'(t)$ *spécifient ce qui se passe au point étudié sur la courbe.*
Autre façon de retrouver cette équation : tronquer un DL de la paramétrisation, soit écrire
$\begin{cases} X = x(t) + h\,x'(t) \\ Y = y(t) + h\,y'(t) \end{cases}$ *et éliminer le paramètre* h.
Une troisième méthode sera évoquée ci-après.

Exemple *:* Le vecteur dérivé de la paramétrisation de l'astroïde étant $(-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t)$ **on peut pour simplifier** prendre le vecteur colinéaire $\mathbf{T} = (-\cos t, \sin t)$ [sauf si $t = k\pi/2, k \in \mathbb{Z}$ mais dans ce cas on a vu qu'il y avait des points non réguliers]). On écrit alors une équation de la tangente par une troisième méthode (mais testez les deux premières), la méthode du déterminant :

$$\begin{vmatrix} X - \cos^3 t & -\cos t \\ Y - \sin^3 t & \sin t \end{vmatrix} = 0 \iff X\sin t + Y\cos t = \cos^3 t \sin t + \sin^3 t \cos t = \cos t \sin t$$

Où cette tangente coupe-t-elle les axes de coordonnées ?...

4.3 Normale

Pour une courbe plane, on déduit immédiatement du vecteur dérivé un vecteur normal, par une rotation de $\pi/2$. Ainsi du vecteur tangent $\mathbf{T} = \binom{x'}{y'}$ (ou tout vecteur plus simple, proportionnel) on peut déduire $\mathbf{N} = \binom{-y'}{x'}$.

Les coordonnées de **N** donnent les coefficients d'une équation de la tangente !

En effet, si le point courant de la droite (tangente) est $M = \binom{X}{Y}$, on a $\langle \binom{X}{Y} - \binom{x(t)}{y(t)} \mid \mathbf{N} \rangle = 0$ qui exprime que $\overrightarrow{M(t)M} \perp \mathbf{N}$. Pour l'astroïde on retrouve immédiatement

$$X\sin t + Y\cos t = C^{te} = \cos^3 t \sin t + \sin^3 t \cos t = \cos t \sin t. \qquad \text{(meilleure méthode ?)}$$

C'est encore plus simple si on veut directement écrire une équation de la normale à la courbe en un point (régulier), car **T** est orthogonal à la normale cherchée, d'où directement l'équation : le point $M(t) = \binom{x(t)}{y(t)}$ est sur la droite, et il suffit de développer $\langle \binom{X}{Y} - \binom{x(t)}{y(t)} \mid \mathbf{T} \rangle = 0$, d'où

$$x'(t)X + y'(t)Y = C^{te} = x'(t)x(t) + y'(t)y(t).$$

Par exemple pour le cercle $x = \cos t, y = \sin t$, on (re)trouve que la normale passe toujours par le centre :

$$-X\sin t + Y\cos t = -\sin t\cos t + \cos t \sin t = 0$$

Autre exemple, on a vu pour l'astroïde que $\mathbf{T} = (-\cos t, \sin t)$ (on a factorisé un terme encombrant et donc inutile). On en déduit immédiatement une équation de la normale :

$$-X\cos t + Y\sin t = (-\cos t\cos^3 t + \sin t \sin^3 t) = -\cos 2t$$

II est possible de définir une normale à un arc non plan[6], mais cela dépasse le cadre de notre programme.

Exploration : allez voir le magnifique site du collègue Bob Ferréol `http://www.mathcurve.com/`.

6. On se restreint alors au plan engendré par les dérivées première et seconde : un coup de Gram-Schmidt et c'est bon !