Équations différentielles linéaires

par Emmanuel AMIOT

21 février 2020

1 L'équation linéaire scalaire d'ordre 1

(révisions de Sup)
On s'intéresse à l'équation :

$$(E) \quad y' = ay + b \qquad \text{ou même (forme non résolue)} \qquad ay' + by + c = 0$$

où a, b, c sont des applications continues données et y une fonction dérivable de l'intervalle I dans $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.

1.1 Qu'est-ce qu'une solution ?

DÉFINITION 1. *Le COUPLE* (y, J) *est solution de* (E) *ssi*

$$\forall t \in J \qquad y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$$

Il est essentiel de toujours se souvenir qu'on a une solution **sur un intervalle bien déterminé** : une fonction, mais aussi son domine de validité.
Exemple : $xy' = 3y$ admet entre autres les solutions

$$x \mapsto x^3 \qquad x \mapsto |x|^3 \qquad \text{sur } \mathbb{R}$$

et toute combinaison du genre suivant est encore solution :

$$x \mapsto f_{\lambda,\mu}(x) = \begin{cases} \lambda x^3 & \text{si } x < 0 \\ \mu x^3 & \text{sinon} \end{cases}$$

1.2 Les plus grandes sont-elles les meilleures ?

DÉFINITION 2. *La solution* (f, I) ***prolonge*** *la solution* (g, J) *ssi* $J \subset I$ *et de plus* $f|_J = g$.

Ceci donne une relation d'ordre (partiel) sur l'ensemble des solutions.

DÉFINITION 3. *La solution* (f, I) ***est maximale*** $\iff$ *elle n'admet pas de prolongement strict.*

À noter qu'il existe toujours des solutions maximales, et que toute solution est restriction d'une solution maximale (parfois de plusieurs. . .) : c'est un résultat ensembliste.

Exemple *:* La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est solution maximale de $2xy' = y$ (son prolongement par continuité en l'origine cesse d'être dérivable).

1.3 Espace des solutions

Parfois il arrive que l'ensemble des solutions **sur un intervalle donné** ait une forme géométrique simple. Ainsi on a le :

1.3.1 Thm fondamental – cas homogène.

THÉORÈME 1. *L'équation $y' = ay$ admet une* <u>*droite*</u> *de solutions sur* I *(et en particulier ce sont des solutions maximales), qui sont données par la formule*

$$t \mapsto \lambda e^{\int a(t)dt}$$

où λ désigne une constante arbitraire.

À noter qu'en particulier, la seule solution qui puisse s'annuler (en un point) est la solution nulle (sur I).

Démonstration. Changer de fonction inconnue : $z = y.e^{-\int a(t)dt}$. ♦

Remarques : il est évident *a priori* que l'espace des solutions est un ev, mais pas qu'il est de dimension 1. More on this later (*cf* les récurrences linéaires).

1.3.2 Ce qu'il ne faut surtout pas faire.

« On a $\quad y' = ay \iff \dfrac{y'}{y} = a \iff \ln|y| = \displaystyle\int a + C \iff y = (\pm?)\,\lambda\, e^{\int a\ (+C?)}$ »

- — Que de trous ! que de flou ! Que penser des | | ?
- — Ce calcul peut être justifié et rendu valide par le thm du cours : on peut diviser par y quand on sait que y ne s'annule jamais. Or on **sait** que si y s'annule en un point, alors y est la solution nulle : on la met de côté et on recherche les autres.
- — Mieux encore : sachant que toutes les solutions sont proportionnelles, il suffit de rechercher (par tous les moyens. . .) **une** de ces solutions. . .
- — Un physicien, par exemple, **est dans son droit** quand il aligne ce genre de calculs. En effet, il ne raisonnera pas sur une pure (?) fonction mathématique, mais sur une grandeur physique qui aura des raisons tout aussi physiques de ne pas s'annuler !

1.3.3 L'équation avec second membre.

THÉORÈME FONDAMENTAL. *L'ensemble des solutions de l'équation $y' - ay = b$ est une* ***droite affine*** *qui s'écrit $\varphi + \lambda e^{\int a}$, où φ désigne une solution particulière.*

À noter que la direction de cet espace affine solution est l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène associée.

Remarque importante : superposition des solutions.

Par exemple, soit à résoudre $y' = y + \cos x + x - 1$. On superpose des solutions particulières des trois équations

$$\begin{array}{rcrcc} y' &=& y &+& \cos x \\ y' &=& y &+& x \\ y' &=& y &-& 1 \end{array} \qquad \text{soit} \qquad \begin{array}{c} \frac{1}{2}(\cos x - \sin x) \\ -x-1 \\ +1 \end{array}$$

qui donne enfin la solution particulière $\dfrac{1}{2}(\cos x - \sin x) - x$ d'où la solution générale : $x \mapsto \lambda e^x + \dfrac{1}{2}(\cos x - \sin x) - x$.

1.3.4 Recheche d'une solution particulière.

On utilise la (sic !) méthode de variation de la constante, *i.e.* on la recherche sous la forme $\lambda e^{\int a}$ avec λ non point constant, mais dérivable. On trouve toujours une quadrature : $\lambda' = \ldots$ et il n'y a plus qu'à primitiver. Exemple :

$xy' - y = \dfrac{1}{1+x^2}$. La solution de l'équation sans second membre est $y = \lambda x$.[1]
Faisant varier la fonction $\lambda(x)$, on obtient une équation en λ' :

$$x\lambda'(x)x(1+x^2) = 1 \iff \lambda' = \frac{1}{x^2(1+x^2)} \iff \lambda(x) = C^{te} - \frac{1}{x} - \arctan(x)$$

d'où enfin la solution générale $\boxed{y = kx - 1 - x\arctan x, k = C^{te}}$.

1.3.5 Vers Cauchy-Lipschitz.

Remarque : on a pour l'équation $y' = ay + b$ sur I la solution $y_k = \varphi + \lambda e^{\int a}$ où φ s'obtient par exemple par la méthode précédente. L'équation

$$(\varphi + \lambda e^{\int a})(x_0) = y_0,$$

du premier degré en λ, admet une et une seule solution, d'où le

THÉORÈME 3. *Soit* $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{C}$ *; il existe une et une seule solution* (y, I) *[maximale] telle que* $y(x_0) = y_0$ *[vérifiant la condition initiale, ou problème de Cauchy].*

Il y a (à x_0 fixé) un **isomorphisme** entre la valeur de $y_0 = y(x_0)$ et la solution y correspondante, lequel isomorphisme est ici une application affine. L'exemple suivant prouve que ce n'est pas toujours le cas :

Exemple *:* L'équation $xy' = 3y$ admet (au moins) le plan de solutions

$$x \mapsto \begin{cases} \lambda x^3 & \text{si } x > 0 \\ \mu x^3 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}.$$

1.3.6 Résolution complète de $ay' + by + c = 0$.

Pratiquement :

— On résout sur tout intervalle où a ne s'annule pas.
— On essaye de recoller.

Exemple *:* : $(1-x^2)y' - 2xy = x^2$
On se place sur l'un des trois intervalles I_i : $]-\infty, -1[,]-1, 1[,]1, +\infty[$.

— Remarquons que $\left(y(1-x^2)\right)' = x^2$ ce qui permet d'économiser du temps et d'écrire la solution générale sur I_i : $\boxed{x \mapsto y = \dfrac{\lambda_i + x^3/3}{1-x^2}}$
À noter bien qu'on ne peut pas considérer ceci comme une solution sur $\mathbb{R}$! (en faisant varier le λ_i selon l'intervalle). Une solution doit avant tout être dérivable.
— Raccordement : pour que deux solutions, disons sur I_1 et I_2 daignent se raccorder en -1, il faut bien évidemment que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ et de plus (pour la continuité) que l'on puisse simplifier par $x+1$, *ie* que $\lambda = \dfrac{1}{3}$. On a alors une fraction rationnelle définie sur $]-\infty, +1[$ qui est bien solution de l'équation. De même en +1. Finalement :

1. Rigoureusement, c'est l'expression des solutions pour $x > 0$ ou pour $x < 0$. Elles se prolongent en solutions sur $\mathbb{R}$, dérivables y compris en 0, à condition de prendre la même constante λ de part et d'auytre de 0.

Les solutions maximales sont :

$$\begin{cases} x \mapsto y = \dfrac{\lambda + x^3/3}{1-x^2} & \text{avec } |\lambda| \neq 1/3, \text{ sur un intervalle } I_i \\ x \mapsto y = \dfrac{x^2 - x + 1}{3(1-x)} \quad \text{sur }]-\infty, 1[\\ x \mapsto y = -\dfrac{x^2 + x + 1}{3(1+x)} \quad \text{sur }]-1, +\infty[\end{cases}$$

Ce n'est pas facile de résoudre complètement une EDO ! Ici nous y sommes parvenus : toutes les solutions sont des restrictions de ces cinq là. Notez sur le dessin qu'il passe une solution et une seule par chaque point du plan, autrement dit les courbes recouvrent l'espace sans jamais se croiser – c'est l'interprétation géométrique du problème de Cauchy.

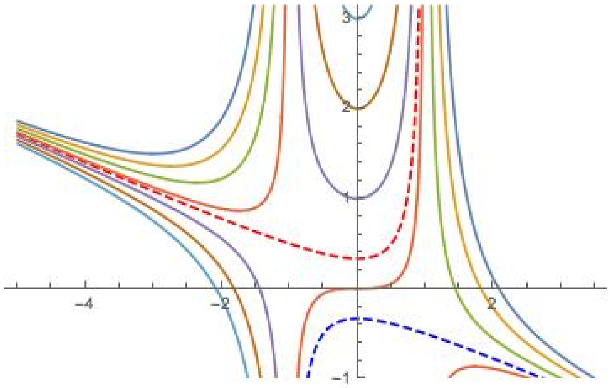

FIGURE 1 – Le flux des solutions maximales

2 Équations differentielles linéaires

Nous allons généraliser maintenant à une dimension plus grande. Nous recherchons maintenant des solutions qui soient des applications vectorielles, d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans un ev de dimension finie.

2.1 Définition, interprétation matricielle

2.1.1 Système différentiel linéaire

On cherche à résoudre (*ie* à intégrer) des systèmes linéaires, comme celui ci :

$$\begin{cases} x' &= 2tx &- & y &+ & \cos t^2 \\ y' &= x &+ & 3\sin t.y &- & 1 \end{cases}$$

On peut réécrire plus simplement ce système ainsi :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = X' = A.X + B = \begin{pmatrix} 2t & -1 \\ 1 & 3\sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t^2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

où :

— X est une fonction inconnue de la variable $t \in \mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}^n$

— A est donnée, continue de I dans $M_n(\mathbb{K})$

— B est donnée, continue de I dans $M_{n,1}(\mathbb{K})$ (ce sont donc des fonctions vectorielles).

On peut sans inconvénient majeur remplacer $\mathbb{K}^n$ par un ev F de dimension n : le problème général est alors de résoudre

$$X' = A(t).X + B(t) \tag{1}$$

où A est une application (continue) de I dans $\mathcal{L}(F)$ et B est une application (continue) de I dans F, l'inconnue est une application vectorielle dérivable $X = I \to F$.

2.1.2 Équation scalaire d'ordre > 1.

On rencontre souvent des équations entre fonctions numériques, mais faisant intervenir des dérivées d'ordre supérieur (exemple : PFD !). Ceci n'est pas différent du cas précédent pour le mathématicien. Soit en effet une équation de la forme

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + + \dots a_{n-1} x' + a_n x = b$$

où x est la fonction inconnue recherchée (au moins n fois dérivable), de I dans $\mathbb{R}$ (ou à la rigueur dans $\mathbb{C}$), et les fonctions continues $a_1, \dots a_n$ et b données sont les coefficients de l'équation. La transformation suivante permet d'écrire un système différentiel équivalent :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ x'' \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix} ; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b \end{pmatrix} ; \quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ x'' \\ \vdots \\ x^{(n)} \end{pmatrix} = AX + B$$

Nous exploiterons surtout cette transformation pour les équations linéaires scalaires d'ordre 2, mais elle fonctionnerait même pour des systèmes mixtes (système d'équations d'ordre 2. . .).

2.2 Le problème de Cauchy

Très souvent (par exemple dans un problème de mécanique du solide, ou des fluides) on a, non seulement une telle équation, mais aussi des conditions initiales. C'est la situation type dans les systèmes dynamiques : on a une loi de l'évolution du système (l'équation différentielle) et un état initial, et on cherche à décrire le comportement futur du système (cf. exercice sur Roméo et Juliette).

On modélise ceci en parlant du *problème de Cauchy* :

DÉFINITION 4. *Un* problème de Cauchy *est la donnée d'une équation comme (1), et d'une* condition initiale *de la forme*

$$X(t_0) = X_0 \tag{2}$$

où $t_0 \in I$ *et* $X_0 \in F$.

Dans le cas du système associé à une équation scalaire d'ordre n, on a une condition initiale de la forme

$$X(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \\ x_0'' \\ \vdots \\ x_0^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

ce qui revient à dire qu'on spécifie la position, la vitesse initiale (éventuellement l'accélération, etc. . .).

Il y a un résultat des plus satisfaisants qui généralise ce que nous avons vu en dimension 1 :

THÉORÈME 4. *L'équation (1) admet une unique solution définie sur* I *au problème de Cauchy* (t_0, X_0).

Contrairement au cas simple de la dimension 1, **il n'existe pas de formule donnant explicitement une telle solution.** La démonstration de ce théorème n'est pas exigible, nous nous contenterons des grandes lignes :

— Résoudre l'équation différentielle est équivalent au problème suivant : *trouver une fonction* X *continue sur* I *et telle que*

$$(\mathcal{I}) \qquad X(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} \big(A(\tau)X(\tau) + B(\tau)\big)\, d\tau$$

Comme on cherche un point fixe (X) d'une application il est naturel (!) de considérer une suite récurrente :

— On définit une suite d'applications continues sur I par

$$X_0(t) = X_0(!!!) \qquad X_n(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} \big(A(\tau)X_{n-1}(\tau) + B(\tau)\big)\, d\tau = \Phi(X_{n-1})(t)$$

— Sur un segment $K \subset I$, on munit l'espace E des fonctions continues sur K de la norme de la convergence uniforme. Ceci permet de majorer uniformément $\|A.X\|$ par $\alpha\|X\|$.

— On a $\|X_n(t) - X_{n-1}(t)\| = O(|t-t_0|^n/n!)$ (par récurrence) et donc $\|X_n - X_{n-1}\|_\infty = O(M^n/n!)$.

— La série $\sum(X_n - X_{n-1})$ est normalement convergente dans E, et donc la suite (X_n) est (uniformément) convergente.

— Sa limite X vérifie $(\mathcal{I})$ sur K.

— On peut faire la manip pour tout $K \subset I$ et donc avoir une solution sur I entier.

— On montre similairement l'unicité : si Y est une solution du même PdC, alors $X - Y = \int A.(X-Y)$ par différence et en introduisant $m = \|X - Y\|_\infty$ (quitte à se restreindre à un segment $K \subset I$) il vient de manière similaire

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |X(t) - Y(t)| \leqslant \frac{m|t-t_0|^n}{n!}$$

d'où $X = Y$ par passage à la limite. Ceci est vrai sur tout compact K de I donc vrai sur I.

Ce procédé peut servir à construire explicitement une solution. Essayez avec $y' = y$ en dimension 1 par exemple, vous allez retrouver le DSE de exp !

EXERCICE 1. *Calculer le polynôme* $y_n(x)$ *défini par la relation de récurrence*

$$y_n = 1 + \int_0^x y_{n-1} \qquad y_0 = 1$$

2.3 Structure de l'ensemble des solutions

2.3.1 Géométrie de l'ensemble des solutions

COROLLAIRE 1. *L'espace des solutions est un espace affine, de dimension égale à celle de F. Sa direction n'est autre que l'espace des solutions du* ***système homogène associé*** $(H) : \quad X' = A.X$

Démonstration. Si X, Y sont solutions de (1) alors immédiatement $X - Y$ est solution de (H). Par ailleurs, le théorème 4 assure que l'application qui à une solution X de (H) associe sa valeur $X(t_0)$ en t_0 fixé est bijective. Comme elle est clairement linéaire, c'est un isomorphisme. ♦

Insistons sur le fait que les solutions de (H) forment un sev de $\mathcal{C}^1(I)$ isomorphe à F par l'application « naturelle » qui à un vecteur X_0 de F associe « la » solution passant par X_0 à l'instant t_0 — pour parler avec un langage de systèmes dynamiques. À chaque instant, on peut se représenter F traversé par les solutions de (1) en des points tous distincts.

Comme en dimension 1, ce théorème nous assure que la solution la plus générale est de la forme $X = \Phi + \chi$, où Φ est une solution particulière et χ toute solution de (H).

La résolution de (H) est clairement incontournable pour obtenir toutes les solutions. Dans la pratique, on en a même souvent besoin pour trouver UNE solution (et alors on les a toutes d'après le théorème 4).

2.3.2 Variation des constantes

— Supposons que l'on connaisse, par quelque miracle, une base $X_1, \ldots, X_n$ de l'espace des solutions de (H). Cela signifie donc que toute solution de (H) s'écrit de façon unique
$$\lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_n X_n$$
où les λ_i sont des constantes (des vraies !)

— On va comme en dimension 1 faire varier les constantes, *ie* chercher une solution de 1 sous la forme $\sum \lambda_i X_i$ où les (λ_i) sont des fonctions numériques dérivables. Ce calcul sera justifié *a posteriori* quand il livrera une solution particulière. Le calcul donne :
$$B = X' - A.X = \sum \lambda_i X_i' + \sum \lambda_i' X_i - \sum \lambda_i.A.X_i = \sum \lambda_i' X_i$$

et donc : $\boxed{\text{les } (\lambda_i') \text{ sont les coordonnées du second membre dans la base des solutions } (X_i) \text{ de } (H)}$.

Il appert donc que l'on saura résoudre (1) si le système obtenu est de CRAMER (une solution et une seule), ce qui est équivalent, on le sait, à la non nullité de son déterminant.

Le théorème de structure affirme que de telles bases de l'espace des solutions de (H) existent. Mais ne dit rien quant à comment les trouver. . .

Exemple : Résolvons le système (E) $\begin{cases} x' &= 2tx - y + t\cos t \\ y' &= x + 2ty + t\sin t \end{cases}$ sur $\mathbb{R}$.

— On écrit (H) : $\begin{cases} x' = & 2tx - y \\ y' = & x + 2ty \end{cases}$.

— On résout (H).
Ici on peut poser habilement $u = xe^{-t^2}$ et $v = ye^{-t^2}$ ce qui donne le système équivalent (pourquoi équivalent au fait ?) : $\begin{cases} u' = & -v \\ v' = & +u \end{cases}$ que l'on sait résoudre (vu que par exemple

$u'' = -u$). On choisit deux solutions indépendantes, par exemple

$$\begin{pmatrix}\cos\\ \sin\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix}-\sin\\ \cos\end{pmatrix}$$

ce qui donne une base de solutions de (H) :

$$h_1 = e^{t^2}\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad h_2 = e^{t^2}\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$$

— Résolution avec second membre.
On cherche une solution de (E) cette fois sous la forme $\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2$ ce qui donne sans réfléchir et sans calculs un système en les (λ_i') :

$$\lambda_1' h_1 + \lambda_2' h_2 = t\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix} = te^{-t^2} h_1$$

d'où par indépendance linéaire

$$\begin{cases}\lambda_1' &= te^{-t^2}\\ \lambda_2' &= 0\end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases}\lambda_1 &= \lambda - te^{-t^2}/2\\ \lambda_2 &= \mu\end{cases}$$

d'où l'on tire enfin x et y :

$$\begin{cases} x &= \big((\lambda - te^{-t^2}/2)\cos t - \mu\sin t\big)e^{t^2} &= \lambda\cos t e^{t^2} - \mu \sin t e^{t^2} - t/2\cos t\\ y &= \big((\lambda - te^{-t^2}/2)\sin t + \mu\cos t\big)e^{t^2} &= \lambda\sin t e^{t^2} + \mu \cos t e^{t^2} - t/2\sin t\end{cases}$$

Observer la partie solution de (H), paramétrée par λ, μ, et la solution particulière $-t/2\binom{\cos t}{\sin t}$.

— Esprit de l'escalier.
Ah !... si seulement nous avions pensé à poser $z = x + iy$!...

Comme on le voit dans cet exemple, la résolution de (H) n'a rien d'immédiat. Il y a tout de même un cas de figure fréquent pour lequel on sait toujours résoudre :

2.4 Systèmes linéaires à coefficients constants

Dorénavant, l'application A du système matriciel 1 est constante. Attention ! cela signifie que $t \mapsto A(t)$ donne toujours **le même** endomorphisme de F.

2.4.1 Rappels sur l'exponentielle de matrices

On définit sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la fonction exp par

$$\exp(A) = \sum_{k\geqslant 0}\frac{A^k}{k!}.$$

La série étant absolument convergente (et même normalement convergente sur tout compact), cette fonction est bien définie et continue.[2]

Par sommation d'une série double on établit

PROPOSITION. *Si* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *commutent alors* $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$. *En particulier l'inverse de* $\exp(A)$ *est* $\exp(-A)$.

Si A, B ne commutent pas c'est plus compliqué !

2. On a vu qu'il existe, parmi toutes les normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, certaines qui vérifient $\|A\times B\| \leqslant \|A\|\|B\|$ et *a fortiori* $\|A^k\| \leqslant \|A\|^k$ (par exemple, $\|A\| = n\,\mathrm{Max}\,|a_{i,j}|$). Or on peut choisir librement la norme qui nous convient le mieux puisqu'elles sont toutes équivalentes en dimension finie.

Pratiquement on peut assez facilement calculer l'exponentielle d'une matrice diagonalisable, car par un calcul direct

PROPOSITION. *Si* $A.X = \lambda X$ *alors* $\exp(A).X = e^{\lambda}.X$.

et donc $\exp(A)$ est diagonalisable dès que A l'est, et ses vecteurs propres et valeurs propres sont connus.

Exemple : Considérons la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ -\pi & 0 \end{pmatrix}$: son polynôme caractéristique étant $X^2+\pi^2$, ses v.p. sont $\pm i\pi$. Sans autre forme de procès on sait que $\exp(M)$ est diagonalisable et que ses vp sont $e^{\pm i\pi} = -1$, donc $\exp(M) = -I_2$ (dans ce cas on n'a même pas besoin de calculer les vecteurs propres de M car ils n'interviennent pas !)
Si A n'est pas diagonalisable c'est plus retors, mais on peut parfois s'en sortir en écrivant $A = B + N$ où N est nilpotente et commute avec B.

On ne peut pas dériver par rapport à une matrice (pas encore, mais on regrettera), en revanche on peut introduire une variable réelle t et dériver $\exp(tA)$ par le théorème de dérivation terme à terme, car

$$\sum \left(\frac{t^k A^k}{k!}\right)' = \sum \frac{t^{k-1} A^k}{(k-1)!} = A \sum \frac{t^k A^k}{k!}$$

est une série normalement (et donc uniformément) convergente sur tout compact, et donc

LEMME 1. *La dérivée de* $t \mapsto \exp(tA)$ *existe et vaut* $A.\exp(tA)$.

Attention ! Ceci n'a de sens que pour A constante, ne pas l'oublier (on n'a pas de formule pour les systèmes à coefficients variables).

2.4.2 Formule de résolution

PROPOSITION. *L'unique solution au pb de Cauchy*

$$X' = A.X, X(0) = X_0$$

est donnée par la formule

$$t \mapsto \exp(tA).X_0$$

Démonstration. Mêmes calculs que dans le cas de la dimension 1 grâce au lemme 1. ♦

Ce résultat permet de retrouver Cauchy-Lipschitz linéaire (dans ce cas !), et tous ses corollaires (dimension, structure de l'ensemble des solutions. . .).
C'est aussi une méthode assez pratique quand le calcul de exp(tA) est simple, notamment quand A est nilpotente ou pas loin.
Remarquons que ces applications $t \mapsto \exp(tA)$ sont des morphismes :

$$\exp((s+t)A) = \exp(sA).\exp(tA)$$

EXERCICE 2. *Montrer que ce sont les seuls morphismes dérivables de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathcal{L}(F)$.

Exemple : : résoudre $\begin{cases} x' &= 2x - y \\ y' &= 4x - 2y \end{cases}$. La matrice A du système est nilpotente : donc $\exp(tA) = I + tA$! d'où la solution générale :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2t & -t \\ 4t & 1-2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(1+2t) - \mu t \\ 4\lambda t + \mu(1-2t) \end{pmatrix}$$

REMARQUE 1. *: dans le cas général, on obtient aussi des polynômes acoquinés aux exponentielles (que l'on se souvienne des récurrences linéaires) et on peut montrer que dans le cas le plus général, en s'appuyant sur Cayley-Hamilton et le Thm des noyaux qui donnent la relation*

$$E = \oplus \operatorname{Ker}(A - \lambda_i I)^{m_i}$$

la solution est : $\boxed{\sum e^{\lambda_i t} P_i(t) \text{ où } d^\circ P_i < m_i \text{ et } P_i \text{ a pour coefficients des vecteurs } \textbf{colonnes}\ .}$

2.4.3 Avec second membre

Comme en dimension 1, on peut appliquer la méthode de variation de la constante. Soit X une solution de $X'(t) = A.X(t) + B(t)$, on considère $Y(t) = \exp(-tA).X(t)$, autrement dit on pose $X(t) = \exp(tA)Y(t)$. Un calcul immédiat donne $Y'(t) = \exp(-tA).B(t)$: donc Y se trouve par primitivation.

PROPOSITION. *La solution générale du système 1 dans le cas des coefficients constants est*

$$X(u) = \exp(uA). \int \exp(-tA).B(t)\, dt$$

(ne pas retenir la formule mais savoir utiliser le procédé).

Exemple : $\begin{cases} x' &= 3x - y + \cos t \\ y' &= x + y + 2\sin t \end{cases}$. On remarque habilement que la matrice du système homogène n'est pas diagonalisable, mais encore plus habilement que

$$x' - y' = 2(x - y) + \cos t - 2\sin t$$

et en posant $u = x - y$ on trouve aisément $x - y = \lambda e^{2t} + \sin t$. On en déduit $y' = 2y + \lambda e^{2t} + 3\sin t$ que l'on résout :

$$\begin{cases} x = (\lambda t + \mu)e^{2t} - \dfrac{3}{5}(\cos t + 2\sin t) \\ y = (\lambda t + \mu + \lambda)e^{2t} - \dfrac{1}{5}(3\cos t + \sin t) \end{cases}$$

Remarquons pour conclure ce paragraphe que

$$\exp(tA) = \exp t\big(2I + (A - 2I)\big) = e^{2t} I. \exp t(A - 2I) = e^{2t}\big(I + t(A - 2I)\big)$$

car $A - 2I$ est nilpotente. On retrouverait ainsi le résultat.

2.4.4 Pratique de résolution de systèmes différentiels matriciels

On n'a pas toujours la motivation suffisante pour calculer une exponentielle de matriices (avec un paramètre t en plus !). Voyons des méthodes plus directes :

1. Si A est diagonale. On a alors un système d'équations découplées, de la forme $x_i' = \lambda_i x_i$ qui s'intègrent immédiatement en $x_i = c_i e^{\lambda_i t}$.

2. Si A est diagonalisable. Un changement de base nous ramène au cas précédent. Voyons cela de plus près :
   Mettons que $P^{-1}AP = \Delta$. Posons $Y = P^{-1}X$, alors
   $$(E) \Leftrightarrow Y' = \Delta Y$$
   qui se résout à vue comme on vient de le dire. Il n'y a plus qu'à écrire que $X = PY$ et c'est fini.

3. Remarques.
   — Soit C_i un vecteur propre de A — *i.e.* un vecteur colonne de P — associé à λ_i, alors on a la solution $t \mapsto e^{\lambda_i t} C_i$.

   On a donc directement toutes les solutions sous la forme : $\boxed{t \mapsto \sum_i c_i e^{\lambda_i t} C_i}$
   où les (C_i) ne sont autres que les colonnes de la matrice de passage.

   Le calcul de P^{-1} est donc (ouf!!!) superflu.
   — Ceci peut se retrouver directement : posons $e^{\lambda_i t} C_i = X_i$. On a bien $X_i' = \lambda_i X_i = AX_i$, donc on tient une solution, et même n indépendantes puisque les C_i forment une base.
   — L'espace des solutions est donc de dimension n (on le retrouve).
   — Il y a une et une seule solution au pb de Cauchy (même remarque).
   — Si on cherche une solution dans $\mathbb{R}$ (quand A est une matrice réelle...) et qu'on est amené à diagonaliser dans $\mathbb{C}$, pas de problème, on prend à la fin les parties réelles et imaginaires des solutions trouvées.

4. $*$ Cas général. Dans le pire des cas, on peut toujours trigonaliser A (dans $\mathbb{C}$). Or on sait résoudre un système différentiel triangulaire (commencer par la dernière équation... cf. la méthode du pivot) de proche en proche. Cette pénible expérience sera traitée en TD. Ou pas.

2.5 Équation linéaire scalaire d'ordre 2 (ou plus)

Nous aurions pu traiter les équations scalaires (c'est à dire que l'espace F est le corps de base) d'ordre n comme corollaire de ce qui précède. Nous nous contenterons de le faire pour l'équation scalaire d'ordre 2, *ie*

$$ax'' + bx' + cx = d$$

où a, b, c, d sont des applications continues de I dans $\mathbb{K}$, et la fonction inconnue x est deux fois dérivable, de I dans $\mathbb{K}$ aussi.

EXERCICE 3. *Réviser l'équation scalaire d'ordre 2 à coefficients constants. Par exemple, résoudre*

$$x'' - 3x' + 2x = t^2 - 1 \qquad x'' - 3x' + 2x = e^t \qquad x'' - 2x' + x = \operatorname{ch} t$$

Comme on l'a vu dans le cas des équations scalaires d'ordre 1, il vaut mieux que a ne s'annule pas. Sinon, il se pose des problèmes de recollement. Nous n'en étudierons qu'à titre d'exemple. Dorénavant, nous supposerons donc que a ne s'annule pas sur I, ce qui ramène à une équation de la forme

$$x'' + \alpha x' + \beta x = \gamma. \tag{E}$$

2.5.1 Système d'ordre 1 associé

On se ramène à un système d'ordre 1 dans $\mathbb{K}^2$ par le subterfuge déjà évoqué : on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$. Alors X doit vérifier le système équivalent à l'équation scalaire :

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix}.X + \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \end{pmatrix} = A.X + B. \tag{3}$$

Tous les résultats sur les systèmes linéaires s'appliquent à (3). Paraphrasons–les :

PROPOSITION. *Tout problème de Cauchy pour l'équation* (E) *possède une et une seule solution, définie sur* I *: il existe une et une seule solution qui vérifie*

$$x(t_0) = x_0 \qquad et \qquad x'(t_0) = x'_0$$

Graphiquement, cela signifie qu'il existe une seule courbe solution passant par un point donné avec une tangente donnée.
L'espace des solutions de l'équation (E) *est un plan affine, dont la direction est le plan vectoriel des solutions de*

$$(H)\ :\ x'' + \alpha x' + \beta x = 0$$

2.5.2 Wronskien de deux solutions

Soient x_1, x_2 deux solutions de (E). Alors

DÉFINITION 5. *Le Wronskien de* x_1, x_2 *est* $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x'_1 & x'_2 \end{vmatrix} = x_1 x'_2 - x'_1 x_2$.

Clairement il est nul quand x_1 et x_2 sont colinéaires. La réciproque est vraie, en effet x_1/x_2 est constant $\iff (x_1/x_2)' = \dfrac{W}{x_2^2} = 0$ (supposant que x_2 n"est pas identiquement nulle).
De plus, il vient

$$W' = x_1 x''_2 - x''_1 x_2 = x_2(\alpha x'_1 + \beta x_1) - x_1(\alpha x'_2 + \beta x_2) = -\alpha W$$

d'où

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} -\alpha\right)$$

et donc

PROPOSITION. *Si W s'annule en un point alors il s'annule partout. S'il est non nul en un point alors il ne s'annule jamais.*

Le Wronskien peut servir à la résolution. Si en effet on a trouvé une solution x_1 (par exemple une solution DSE comme on le verra en exercice, ou par faveur de la déesse Namagiri), on peut en trouver une autre à l'aide de W car

$$x_1 x'_2 - x'_1 x_2 = W$$

est devenue une équation du premier ordre en x_2, tous les autres termes étant connus.

Exemple : $t^2x''(t) - tx'(t) + x(t) = 0$ admet une solution évidente $x_1(t) = t$ (sur $\mathbb{R}$, on n'en espérait pas tant). Le Wronskien vérifie $tW' = W$ (mieux vaut refaire le calcul à chaque fois plutôt qu'apprendre la formule) et vaut donc $W(t) = W_0 t$. On a donc pour toute solution x_2 encore inconnue

$$tx_2' - 1x_2 = W_0 t \iff \frac{tx_2' - x_2}{t^2} = \frac{W_0}{t} \iff x_2 = \lambda t + W_0 t \ln t$$

Un cas particulier fréquent (pensez au PFD) est celui d'une équation incomplète de la forme

$$y'' + q(t)y = 0$$

On a alors $W = C^{te} = w$ et donc pour toute paire de solutions, $x_1x_2' - x_1'x_2 = w$. Si on connaît une solution (qui ne s'annule pas) x_1, on a la solution générale par la méthode de variation de la constante : posant $x_2 = \lambda x_1$ il vient

$$\lambda' = \frac{w}{x_1^2} \Rightarrow x_2 = wx_1 \int \frac{dt}{x_1^2(t)} + \mu x_1$$

où w et μ sont deux constantes arbitraires.

> En fait, on obtient la même résolution en cherchant directement une solution de la forme $x_2 = \lambda x_1$, avec l une fonction inconnue ! C'est une méthode très fréquente en pratique (et elle évite de s'enquiquiner avec W).

2.5.3 Résolution pratique

Comme d'habitude (enfin, dans les cas linéaires), le problème se décompose en deux temps :
⋆ Résolution de l'équation homogène (H) (un plan vectoriel de solutions)
⋆ Recherche d'une solution particulière φ.
La solution la plus générale s'écrira alors

$$y = \varphi + \lambda h_1 + \mu h_2$$

où (h_1, h_2) désigne une base des solutions de (H) (un **système fondamental**).
Il n'y a pas de technique miracle de résolution de (H). Citons les recettes suivantes :
⋆ Se ramener aux cas des coefficients constants, qu'on sait résoudre !
⋆ Chercher une (des) solutions DSE par identification des coefficients. Ne pas oublier de vérifier qu'on a bien trouvé une solution (de rayon de convergence > 0 !)
⋆ User de changements de variables ou de fonction inconnue.

Exemple :

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0$$

avec a, b, c des constantes, s'arrange plutôt bien en posant $x = e^t$ et donc $z(t) = y(x) = y(e^t)$ (équation d'Euler), et encore mieux en cherchant directement des solutions du type $y(t) = (\pm t)^\alpha$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$.

Supposons (H) résolue. Alors. . .

• Si une solution de (H) ne s'annule jamais. . .. Soit h une solution de (H) qui ne s'annule pas sur I. On recherche une solution de (E) sous la forme $y = g.h$. Sur un intervalle où h reste non nulle, (E) équivaut alors à

$$g''h + g'(ah + 2h') = c \qquad \text{(à savoir faire, mais ne pas retenir la formule !)}$$

On est donc ramené à une équation du premier ordre en g', dont il faut primitiver une solution pour récupérer g, d'où enfin y. Pratiquement, on refait toujours le calcul :

Exemple *:* : $y'' - 3y' + 2y = e^{-t}$.
La solution générale de (H) étant $\lambda e^t + \mu e^{2t}$, on pose habilement $y = e^t g(t)$ ce qui donne

$$y' = e^t(g + g'), y'' = e^t(g + 2g' + g'')$$

d'où la nouvelle équation **où le terme en g disparaît automatiquement** :

$$e^t(g'' - g') = e^{-t} \quad \Leftrightarrow \quad g'' - g' = e^{-2t}$$

On se contente d'une solution particulière, $-e^{-2t}/3$ par exemple, d'où enfin la solution générale :

$$y = \lambda e^t + \mu e^{2t} - e^{-t}/3$$

...que bien entendu on aurait pu trouver plus vite.
• Méthode générale.
On va, comme pour un système différentiel, utiliser la méthode de variation des constantes.

> Attention ! Il ne suffit pas de poser $x = k_1 h_1 + k_2 h_2$, car les calculs sont alors inextricables (essayer...). Le problème est en dimension 2 et il faut donc le poser comme un système de deux équations.

Précisément, si (h_1, h_2) est une base de l'espace des solutions de (H), alors c'est que $\left(\binom{h_1}{h_1'}, \binom{h_2}{h_2'}\right)$ est une base de l'espace solution de $X' = A.X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix} X$.
On sait qu'il convient de rechercher une solution particulière sous la forme

$$k_1 X_1 + k_2 X_2 = k_1 \begin{pmatrix} h_1 \\ h_1' \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} h_2 \\ h_2' \end{pmatrix}$$

et qui doit vérifier $k_1' X_1 + k_2' X_2' = B$ autrement dit **(à retenir par cœur)**

$$\begin{cases} k_1' h_1 & + & k_2' h_2 & = & 0 \\ k_1' h_1' & + & k_2' h_2' & = & \gamma \end{cases}. \qquad (\heartsuit)$$

On peut résoudre ce système dans le cas général, ce qui fait apparaître son déterminant, alias le Wronskien, au dénominateur :

PROPOSITION. *Une solution particulière de l'équation est*

$$\int \frac{\gamma}{h_1 h_2' - h_2 h_1'}(u)\big(h_1(u) h_2(t) - h_2(u) h_1(t)\big) du.$$

Ne pas retenir la formule : il faut surtout retenir que le système nous livre pieds et poings liés les k_i sous forme intégrale : on en déduit la solution, au pire, sous la même forme.

Exemple *:* $y'' + y = 1/\cos x$.
On a ici $h_1 = \cos, h_2 = \sin$ d'où le système

$$\begin{cases} k_1' \cos & + & k_2' \sin & = & 0 \\ -k_1' \sin & + & k_2' \cos & = & 1/\cos \end{cases}$$

qui donne $k_1' = -\tan, k_2' = 1$ *ie* $k_1 = \ln|\cos|, k_2 = t$ (on peut mettre «plus constante» mais cela ne fait que rajouter la solution générale de (H)) :

$$\boxed{y = \cos t(\lambda + \ln|\cos t|) + (t + \mu)\sin t}$$