Réduction des endomorphismes

par Emmanuel Amiot

16 décembre 2019

Ambition

L'étude d'un endomorphisme, ou de la notion équivalente de matrice, est complexe parce que l'image d'un vecteur (de base) est généralement une combinaison de tous les vecteurs (de la base). Le cas où chaque vecteur de base est transformé en un multiple de lui-même est bien plus compréhensible : l'action de l'endomorphisme sur l'espace de dimension n est ainsi réduite à n actions très simples en dimension 1. La matrice associée à une telle transformation est diagonale, et réciproquement. Le problème consiste donc à trouver comment se ramener, si possible, à ce cas simple : c'est *diagonaliser la matrice [ou l'endomorphisme]*. Un outil qui s'avère essentiel est le polynôme de matrices.

Exemple : Commençons par une matrice diagonale, le cas le plus simple et celui auquel on espère se ramener : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

On peut voir que l'endomorphisme associé [1] agit de manière ultra simple sur les vecteurs de la base canonique : e_2 et e_3 sont tout bonnement multipliés par 3, de même pour les autres. Notons qu'il y a tout un espace – un plan vectoriel – de vecteurs que la matrice multiplie par 3, qui est engendré par e_2 et e_3.

Les valeurs de multiplication se trouvent sur la diagonale. Comment les trouver de façon plus générale ? Observons déjà que pour toute puissance $n \in \mathbb{N}$ on a

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \text{ et donc, par combinaison linéaire, } P(A) = \begin{pmatrix} P(2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P(3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P(3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P(-1) \end{pmatrix}$$

pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$.

En particulier, on aura $P(A) = 0_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}$ si et seulement si P admet pour racines 2, 3 et -1. L'ensemble de ces polynômes annulateurs est un idéal, celui des polynômes multiples de $(X-2)(X-3)(X+1)$. La recherche de cet idéal sera donc capitale dans le cas d'une matrice quelconque et justifie l'irruption inattendue des polynômes de matrices.

Exemple : Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 2/5 & 2/5 & 2/5 \\ 2/5 & 2/5 & 2/5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$. Ici les trois vecteurs de la base canonique ont la même image, le vecteur $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. L'image de ce vecteur étant lui-même, on

1. On rappelle que toute matrice carrée définit un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$, celui qui envoie la base canonique sur la famille des vecteurs colonnes.

constate que pour tout vecteur ϵ de la base canonique on a $A \times A \times \epsilon = A \times \epsilon$. Une relation linéaire vraie sur une base est vraie sur tout l'espace, et donc $A^2 = A$, ce que l'on peut aussi vérifier par produit matriciel (on dira que X^2-X est un polynôme annulateur de A), et on sait que cela signifie que l'endomorphisme associé p est un projecteur. En particulier, il existe deux sous-espaces stables, qui sont ici le noyau et l'image de p, supplémentaires, tels que l'image soit aussi l'ensemble des points fixes. Ici l'image est clairement la droite engendrée par le vecteur $e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et on calcule facilement que le noyau a pour équation $(x+y+z=0)$: une base de $\operatorname{Ker} p$ est donc constituée des vecteurs $e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ (entre autres possibilités).

Cherchons la matrice de p dans la nouvelle base constituée de ces trois vecteurs : vu que $p(e-1) = e_1$ et $p(e_2) = p(e_3) = 0$, c'est $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est diagonale.

On a donc réussi à **diagonaliser** la matrice. D'après la formule du changement de base, si on exprime la nouvelle base dans l'ancienne par la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, on a la relation $A' = P^{-1}AP$ qui exprime que l'ancienne et la nouvelle matrice sont semblables. Tout l'objectif de ce chapitre consiste donc à faire tourner l'espace jusqu'à ce que, dans la base choisie, la matrice devienne la plus simple possible (diagonale).

On peut s'amuser à faire cela à la souris de manière interactive à l'adresse

`http://demonstrations.wolfram.com/ElementsPropresInteractifsFrench`

1 Polynomes d'endomorphismes

Motivation

Imaginons que l'on ait réussi – notre matrice infâme est devenue, après changement de base, une jolie matrice diagonale, par exemple $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Il se noue alors d'étranges relations avec les **polynômes**. Par exemple, il est facile de calculer une puissance de cette matrice (contrairement au cas général), car $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}$.

Plus généralement, on aura pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ $P(A) = \begin{pmatrix} P(2) & 0 & 0 \\ 0 & P(-1) & 0 \\ 0 & 0 & P(5) \end{pmatrix}$.

Une telle expression est simple quand on a les valeurs diagonales.

Réciproquement, des polynômes simples permettent de trouver ces dernières : ainsi on voit pour des polynômes de la forme $X - \lambda_i$ que

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \ A + I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A - 5I = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où immédiatement

$$(A-2I)(A+I)(A-5I) = A^3 - 6A^2 + 3A + 10I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \text{ (quel 0 ?)}$$

Vous voyez que ce **polynôme annulateur** contient (par ses racines) exactement l'information nécessaire pour trouver les coefficients diagonaux – ni plus, ni moins. Explorons cela.

1.1 Définition

DÉFINITION 1. *Pour tout* $u \in \mathcal{L}(E)$, E *étant un* $\mathbb{K}-$*espace vectoriel, on pose* $u^0 = \mathrm{id}, u^1 = u$ *et on définit par récurrence* $u^n = u \circ u^{n-1}$.
Alors pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X], P(X) = a_0 + a_1 X + \dots a_n X^n$, *on définit* $P(u) \in \mathcal{L}(E)$ *par*

$$P(u) = a_0 \,\mathrm{id} + a_1 u + a_2 u^2 + \dots + a_n u^n$$

REMARQUE GÉNÉRALE. *Étant donné le nombre conséquent d'espaces munis de lois de composition dans ce chapitre, on note assez cavalièrement toutes les multiplications par... rien du tout.*

THÉORÈME 1. *L'application* $\Phi : P \mapsto P(u)$ *(pour* u *fixé) est un morphisme d'algèbre entre* $\mathbb{K}[X]$ *et* $\mathcal{L}(E)$.
En particulier on a $(P \times Q)(u) = P(u) \circ Q(u)$ *et ce* $\forall P, Q \in \mathbb{K}[X]$.

Le point capital est la propriété multiplicative. On la démontre pour les monômes : $u^{m+n} = u^m \circ u^n$, et on passe au cas général par linéarité.

Exemple *:* Soit u une projection (on a $u^2 = u$). Alors $(u^2 - 3u + 2\,\mathrm{id}) \circ (u^5 + 4u^2) = 0_{\mathcal{L}(E)}$, car on retrouve $u \circ (u - \mathrm{id})$ en facteur.
Notez qu'aucun des deux facteurs initiaux n'est nul.

EXERCICE 1. *Pourquoi* Φ *n'est-il sûrement pas surjectif (pour* $\dim E \geqslant 2$*) ?*

REMARQUE 2. *Notons que cette notion s'applique tout aussi bien aux matrices carrées : si* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *alors* $P(A) = a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_d A^d$. *De plus, si* A *est la matrice de* u *dans une base* $\mathcal{B}$ *alors* $P(A)$ *est bien évidemment la matrice de* $P(u)$. *Ceci est confirmé par la formule de changement de base :*

PROPOSITION. *Pour tout polynôme* P, *pour toute matrice inversible* $Q \in \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{K})$ *et toute matrice* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *on a* $P(Q^{-1}AQ) = Q^{-1}P(A)Q$.

qui résulte de ce que $(Q^{-1}AQ)^k = (Q^{-1}AQ)(Q^{-1}AQ)\dots(Q^{-1}AQ) = Q^{-1}A^kQ$.

Il est essentiel de faire attention à **faire sens** dans tout ce qu'on écrit (particulièrement pour ce chapitre). Ici on a trois niveaux de complexité : les vecteurs $(x, y \dots \in E)$, les endomorphismes $(u, v \in \mathcal{L}(E))$ ou les matrices, et les polynômes $(P, Q \dots \in \mathbb{K}[X])$. On n'applique pas la loi $\circ$ entre polynômes, mais on peut l'appliquer entre endomorphismes et notamment polynômes d'endomorphismes !

EXERCICE 2. *Avec les notations ci-dessus, lesquelles des écritures suivantes font sens ? Parmi elles, lesquelles sont égales ?*

$$\begin{array}{ccccccc} P(u(x)) & P\circ(Q(u)) & P(u)\circ Q(u) & P\times Q(u) & PQ(u)(x) & PQ(u(x)) & P\times Q(u)(x) \\ v\circ Q(u(x)) & v(Q(u(x))) & v(Q(u)(x)) & v\circ Q(u)(x) & v(x)\circ P(u)(x) & P\circ u(x) & P(u)(x) \\ P(u\circ v) & u\circ P(v) & P(u\circ Q(v)) & P(u\circ v(x)) & P(u\circ v)(x) & P\circ u(v) & P\circ u(v)(x) \end{array}$$

1.2 Polynomes annulateurs

Il y a beaucoup de polynômes. Beaucoup plus que de matrices (ou endomorphismes), car l'espace de ces dernières est de dimension finie. Clarifions celà :

THÉORÈME 2. *L'ensemble des polynômes annulateurs de $u \in \mathcal{L}(E)$ (i.e. $\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}\}$) est un idéal de $\mathbb{K}[X]$. Cet idéal est non réduit à $\{0\}$.*

En effet c'est le noyau d'un morphisme d'anneaux, non injectif (voir dimensions !). Par exemple si $u^2 = u$ on a immédiatement $u^k = u$ pour tout $k \leqslant 1$, et donc tout polynôme en u se réduit à un polynôme de degré 1 :

$$a_0.\,\mathrm{id} + a_1.u + \dots a_n.u^n = a_0\,\mathrm{id} + (a_1 + \dots a_n).u$$

COROLLAIRE 1. *En dimension finie, cet idéal est non réduit à 0 ; tout polynôme annulateur est multiple d'un polynôme de degré minimal qui engendre cet idéal, qu'on appelle polynôme minimal de u.*

On convient que c'est un polynôme unitaire, il est alors uniquement déterminé. Nous le noterons μ_u.

Exemple : Le polynôme minimal d'une projection est $X^2 - X$. Quel est le polynôme minimal d'une symétrie ?
On donne deux matrices (CCP 2019 Maths 2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que le polynôme minimal de A est $(X-1)(X-2)$, que $(B-I)(B-2I) \neq 0$ mais $(B-I)(B-2I)^2 = 0$. Que vaut μ_B ?

PROPOSITION. *Soit d le degré du polynôme minimal de u. Alors d est la dimension de l'image de Φ, i.e. de l'espace des polynômes en $u, \mathbb{K}[u]$.*

Démonstration. On montre que $\mathbb{K}[u] = \mathbb{K}_{d-1}[u]$. Déjà soit P un polynôme de degré quelconque, on écrit la division euclidienne par μ_u :

$$P = \mu_u \times Q + R \Rightarrow P(u) = \mu_u(u) \circ Q(u) + R(u) = R(u)$$

donc $P(u) = R(u)$ avec $d^\circ R < d$ donc $P(u) \in \mathbb{K}_{d-1}[u]$.
Enfin on a unicité de ce R, car si $R(u) = S(u)$ avec $R, S \in \mathbb{K}_{d-1}[X]$ on a $R-S$ qui est annulateur de u mais de degré $< d$, ce qui contredit la minimalité de μ_u sauf si $R - S = 0_{\mathbb{K}[u]}$. ♦

EXERCICE FONDAMENTAL. *Supposons que le polynôme minimal de u est de degré 1. Que peut-on en conclure sur u ?*

Les polynômes en u vont donner des sous-espaces stables, les $\operatorname{Ker} P(u)$, au sens suivant :

2 Sous-espaces stables

2.1 Définition

DÉFINITION 2. *F est stable par $u \iff u(F) \subset F$. On définit alors la restriction de u à F par $u|_F : x \in F \mapsto u(x)$, c'est un* endomorphisme *de F qui est appelé* **l'endomorphisme induit**.

Ex : $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont stables par u.
Attention ! la définition n'est **pas** $u(F) = F$.
Pour parler de restriction de u à F, il FAUT d'abord établir la stabilité. Différent du cas de $u \in \mathcal{L}(E, F)$! où on peut toujours restreindre (puisqu"on ne restreint que dans l'ev de départ).
On a une caractérisation matricielle :

PROPOSITION. *u admet un sous-espace stable F si et seulement si il existe une base de E commençant par une base de F où la matrice de u prend la forme suivante (triangulaire par blocs) $\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$.*

C'est assez évident, A est alors la matrice de la restriction de u à F.
On peut fabriquer de manière assez simple des sous-espaces stables par un endomorphisme... si on en connaît un autre.

PROPOSITION. *Si u et v commutent, alors $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont stables par v.*

Démo immédiate (la faire), mais on en déduit la propriété très utile :

COROLLAIRE 2. *Tout espace de la forme $\operatorname{Ker}(P(u))$ est stable par u.*

En particulier c'est le cas de $\operatorname{Ker}(u - \lambda\, \mathrm{id})$, cf. infra.
C'est aussi le cas si $P(u) = 0$! cela paraît évident mais ce cas est extrêmement important.

EXERCICE 4. *Comparer $\operatorname{Ker} P(u)$ et $\operatorname{Ker} Q(u)$ si P divise Q. Que dire de $\operatorname{Ker}(\mu_u(u))$?*

2.2 Éléments propres

On peut se poser la question du cas le plus simple, celui des **droites stables :** une telle droite a un vecteur directeur x qui vérifie $u(x) = \lambda x$. Matriciellement, il s'agit de vecteurs (colonnes) X tels que AX soit colinéaire à X, i.e. $\exists \lambda \in \mathbb{K}, AX = \lambda X$. La question est naturelle en S.I. quand on cherche de telles droites pour la matrice d'inertie (ou d'inductance), par exemple.

EXERCICE 5. *Soit u un endomorphisme de rang 1, montrer que son image est une droite stable.*

DÉFINITION 3.

- *On dit que* x *est un* vecteur propre *de* u*, associé à la* valeur propre λ*, ssi* $x \neq 0$ *et* $u(x) = \lambda x$*.*
- *L'espace propre* E_λ *est* $\operatorname{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{id})$*. C'est le plus grand sev (stable) où* u *se restreigne à une homothétie de rapport* λ*.*
- *L'ensemble des valeurs propres de* u *est son spectre* $\operatorname{Sp}(u)$*.*

Attention ! $x \neq 0$ (sinon on ne peut pas définir LA valeur propre associée à x).

REMARQUE 3. *On définit de même les éléments propres d'une matrice : des vecteurs propres* X *associés à des valeurs propres* $\lambda \in \mathbb{K}$ *tels que* $AX = \lambda X$*.*

Exemple : $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

PROPOSITION. *Les changements de base ne modifient pas le spectre d'une matrice, deux matrices semblables ont même spectre.*

Démonstration.

$$AX = \lambda X \iff P^{-1}AP(P^{-1}X) = P^{-1}APY = P^{-1}\lambda X = \lambda Y$$

donc à tout vecteur propre de A correspond un vecteur propre de $P^{-1}AP$ associé à la même valeur propre. ♦

La *conjugaison* traduit un changement de base :

$$A \mapsto P.A.P^{-1}$$

est (aussi !) un (auto)morphisme d'algèbre. En fait on a affaire à un même endomorphisme exprimé dans une base différente : le spectre de A étant aussi le spectre de cet endomorphisme est forcément égal à celui de $P^{-1}AP$.

REMARQUE 4. *Une ambiguïté pratique apparaît ici : toute matrice réelle est, de droit, une matrice complexe ! Mais du fait que tout réel est un complexe, on a que toute valeur propre réelle est aussi une valeur propre complexe. Autrement dit,*

$$\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$$

Bien sûr résoudre $AX = \lambda X$ *(où l'inconnue est* X*) donnera des vecteurs réels si* $\lambda \in \mathbb{R}$ *mais non réels (complexes) si* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$*. On verra qu'il est souvent utile de feindre de croire qu'une matrice réelle est complexe pour mieux la réduire...*
Cette inclusion reste vraie si on étend la recherche du spectre à tout sur-corps du corps des coefficients de la matrice. Par exemple, une matrice réelle de dimension 3 a au moins une valeur propre réelle. Si elle n'en a pas plus dans $\mathbb{R}$*, elle possèdera néanmoins aussi deux valeurs propres complexes, conjuguées car*

$$AX = \lambda X \Rightarrow \overline{AX} = \overline{\lambda X} \iff A\overline{X} = \overline{A}\,\overline{X} = \overline{\lambda}\,\overline{X}$$

Cette remarque permet, d'une part, d'étendre les calculs sur les matrices réelles au cas complexe si nécessaire, et d'autre part, de réduire ce calcul d'un facteur 2 !

REMARQUE 5. *Une droite est stable* $\iff$ *elle a un vecteur directeur propre.*

REMARQUE 6. $E_\lambda(u)$ *est stable par tout* v *qui commute avec* u *(résultat très fréquemment demandé, savoir le redémontrer).*

REMARQUE 7. *Les moments principaux d'inertie sont les valeurs propres de la matrice d'inertie d'un solide, les axes d'inertie sont les droites propres.*

Une propriété capitale :

PROPOSITION. $P(\lambda)$ *est v.p. de* $P(u)$ *(*$P \in \mathbb{K}[x], u \in \mathcal{L}(E)$*).*

Démonstration. (* savoir la refaire)
Soit x un vecteur propre de u associé à la v.p. λ : $u(x) = \lambda x$. Il vient

$$u^2(x) = u(u(x)) = u(\lambda x) = \lambda u(x) = \lambda^2 x \dots \quad u^k(x) = \lambda^k x$$

(matriciellement $A^k \times X = \lambda^k.X$. Par pitié, pas de X^k **car cela n'a aucun sens !!!!**)
Par linéarité, cela donne pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ $P(u)(x) = P(\lambda).x$. ♦

En prenant un P tel que $P(u) = 0 = 0_{\mathcal{L}(E)}$, il vient $P(\lambda).x = 0_E$ alors que $x \neq 0$, d'où

COROLLAIRE 3. *Soit* P *un polynôme annulateur de* u*, toute v.p. de* u *est alors racine de* P*.*

On peut en déduire les racines du polynôme minimal. On peut même être très précis :

THÉORÈME 3. *Les racines de* μ_u *sont exactement les valeurs propres de* u*.*

Démonstration. Un sens résulte du corollaire précédent. Dans l'autre, supposons que λ soit racine de μ_u mais $\lambda \notin Sp(u)$. Cette dernière assertion signifie que $\operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{id}) = \{0,\}$, i.e. que $u - \lambda \operatorname{id}$ est injective. Mais pour un endomorphisme en dimension finie cela signifie qu'il est bijectif, i.e. inversible dans $\mathcal{L}(E)$. Donc si on écrit

$$\mu_u(X) = (X - \lambda) \times Q(X)$$

on a

$$0_{\mathcal{L}(E)} = \mu_u(u) = (u - \lambda \operatorname{id}) \circ Q(u) \Rightarrow Q(u) = 0$$

puisque $u - \lambda \operatorname{id}$ est simplifiable. On a donc un polynôme annulateur de degré strictement inférieur à celui de μ_u, ce qui contredit sa minimalité. ♦

Exemple : Soit A la matrice ATTILA (que des 1 !) d'ordre n. Un vecteur propre vérifie donc $\sum x_i = \lambda x_j, \forall j$. On a donc soit $\lambda = 0 = \sum x_i$, soit $\lambda \neq 0$ mais tous les x_j sont égaux. Dans ce dernier cas on a forcément $\lambda = n$: on a trouvé les deux espaces propres, l'un est un hyperplan (c'est le noyau) et l'autre une droite (c'est l'image).
On peut aussi rechercher les v.p. en utilisant la définition, i.e. en écrivant les équations $\sum x_i = \lambda x_j, \forall j$ en discutant selon que $\lambda = 0$ ou pas.

Exemple : Parfois il vaut mieux 'sortir du système' pour trouver les éléments propres. Considérons ainsi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\dots & 0 & \\ n & 0 & 2 & \dots & \\ & n-1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & n \\ (0) & \dots & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le plus simple (!) est de reconnaître la matrice, dans la base canonique, de l'endomorphisme $u : P \mapsto (1-X^2)P' + nXP$ de $\mathbb{R}_n[X]$. Déjà il n'est pas si évident que u n'augmente pas le degré (vérifier sur la base canonique) ! Ensuite si on a un élément propre de u, il vérifie l'équation différentielle

$$u(P) = (1-X^2)P' + nXP = \lambda P$$

que l'on peut réécrire

$$\frac{P'}{P} = \frac{nX-\lambda}{X^2-1} = \frac{n-\lambda}{2(X-1)} + \frac{n+\lambda}{2(X+1)}$$

qui se résout en

$$P = Cte(X-1)^{\frac{n-\lambda}{2}}(X+1)^{\frac{n+\lambda}{2}}$$

qui n'est un polynôme (restons dans le bon espace !) que si $\frac{n-\lambda}{2}$ et $\frac{n-\lambda}{2} \in \mathbb{N}$. Cette affirmation semble évidente mais ne l'est sans doute pas... En tout cas cela donne

$$\lambda = n - 2k, P = (X-1)^k(X+1)^{n-k}, k \in [\![0, n]\!].$$

(d'après CCP 2016)

2.3 Théorème des noyaux

Pour décomposer des sev stables en sommes directes :

On a vu dans l'exemple précédent, que les deux sous-espaces propres sont en somme directe. Le théorème suivant essaye de généraliser cette propriété :

THÉORÈME DES NOYAUX. *Si P et Q sont premiers entre eux, on a*

$$\mathrm{Ker}(P \times Q)(u) = \mathrm{Ker}\, P(u) \oplus \mathrm{Ker}\, Q(u).$$

Démonstration. On utilise essentiellement la propriété de Bezout. L'hypothèse s'exprime par l'existence de polynômes A, B tels que $AP + BQ = 1$. Par le morphisme canonique cela donne dans $\mathcal{L}(E)$ la relation $AP(u) + BQ(u) = A(u) \circ P(u) + B(u) \circ Q(u) = \mathrm{id}$.

— Commençons par montrer que la somme est directe, i.e. que $\mathrm{Ker}\, P(u) \cap \mathrm{Ker}\, Q(u) = \{0\}$. Soit donc $x \in \mathrm{Ker}\, P(u) \cap \mathrm{Ker}\, Q(u)$: on a

$$x = \mathrm{id}(x) = \big(A(u)\circ P(u) + B(u)\circ Q(u)\big)(x) = A(u)\circ P(u)(x) + B(u)\circ Q(u)(x) = A(u)(0) + B(u)(0) = 0$$

puisque $A(u), B(u)$ sont des endomorphismes.

— Si $x \in \mathrm{Ker}\, P(u) \oplus \mathrm{Ker}\, Q(u)$ alors x se décompose en $x = y + z$ où $y \in \mathrm{Ker}\, P(u), z \in \mathrm{Ker}\, Q(u)$. Donc

$$PQ(u)(x) = Q(u) \circ P(u)(y) + P(u) \circ Q(u)(z) = P(u)(0) + Q(u)(0) = 0$$

i.e. $x \in \mathrm{Ker}(PQ(u))$.

— Plus qu'une inclusion ! Soit $x \in \operatorname{Ker}(PQ(u))$ et cherchons à le décomposer en $y+z$ où $y \in \operatorname{Ker} P(u), z \in \operatorname{Ker} Q(u)$. Il convient de poser $y = B(u) \circ Q(u)(x), z = A(u) \circ P(u)(x)$ car on a bien d'une part $x = A(u) \circ P(u)(x) + B(u) \circ Q(u)(x) = z + y$ comme on l'a vu plus haut, et d'autre part

$$P(u)(y) = P(u) \circ B(u) \circ Q(u)(x) = QB(u) \circ P(u)(x) = QB(u)(0) = 0$$

i.e. $y \in \operatorname{Ker}(P(u))$ et de même pour z. ♦

Cette proposition difficile est une spécificité du programme MP ! Elle facilite considérablement nombre de démonstrations. Par exemple :

PROPOSITION. *Toute famille d'espaces propres est en somme directe ; autrement dit, toute famille de vecteurs propres associés à des v.p. différentes, est libre.*

Ceci résulte immédiatement du théorème des noyaux, généralisé à un nombre quelconque de polynômes premiers entre eux deux à deux (ici les $X - \lambda_i$).

EXERCICE (PREUVES ÉLÉMENTAIRES DE LA PROPOSITION).

On veut démontrer indépendamment – et élémentairement – cette propriété, autrement dit on considère une famille (x_i) de vecteurs propres, chacun associé à λ_i avec les λ_i tous distincts. On suppose que $\sum a_i x_i = 0$. En appliquant le polynôme en u $\prod_{i>1}(u - \lambda_i \operatorname{id})$, montrer que $\lambda_1 = 0$. Conclure.
On pourra aussi appliquer $u, u^2, u^3 \dots u^n$ à la relation et utiliser qu'une matrice de VANDERMONDE *est inversible.*

Exemple : On considère l'espace E des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et le sev $\mathcal{S}$ constitué des solutions de l'EDO $y'' + 2ay' + by = 0$.
Notons $u \in \mathcal{L}(E) : f \mapsto u(f) = f'$. Alors $\mathcal{S} = \operatorname{Ker}(u^2 + 2au + b \operatorname{id})$. Pour fixer les idées, supposons que $a^2 - b > 0$: on a alors une factorisation

$$P(X) = X^2 + 2aX + b = (X - \lambda)(X - \mu)$$

et il vient $\mathcal{S} = \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{id}) \oplus \operatorname{Ker}(u - \mu \operatorname{id})$; ce qui signifie que toute solution s'écrit (de façon unique...) $Ae^{\lambda t} + Be^{\mu t}$!

2.4 Le cas le plus simple de diagonalisabilité

En corollaire on a un cas très fréquent :

THÉORÈME 5. ***Dans le cas*** *où u admet n v.p. distinctes, alors u est diagonalisable.*

Démonstration. En effet, on a pour chaque v.p. λ_i $\dim E_{\lambda_i} \geqslant 1$! et donc

$$\dim \bigoplus_i E_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^n \dim E_{\lambda_i} \geqslant \sum_{i=1}^n 1 = n = \dim E$$

En d'autres termes, on peut prendre n vecteur propres indépendants (associés chacun à une v.p. différente), qui constituent donc une base où la matrice est diagonale. ♦

Attention ! ce théorème ne donne qu'une condition **suffisante**, cf. l'exo suivant.

EXERCICE 7. *Donnez plusieurs contre-exemples à la réciproque. I_n en est un bon...*

Exemple : On reprend $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On a vu que les valeurs propres sont 1 et 2, il n'y en a pas trois.
Vérifier que A est diagonalisable (trouver deux vecteurs propres associés à 2).

3 Le polynôme caractéristique et ses applications

3.1 Le polynôme caractéristique

Remarque : le déterminant d'un *endomorphisme* u a un sens, indépendant de la base où l'on choisit d'écrire la matrice de u, puisque le déterminant ne change pas quand on change de base.

3.1.1 Définition

On a vu que λ est une v.p. ssi $u - \lambda \,\mathrm{id}$ est non inversible. D'où la

DÉFINITION 4. *Le* polynôme caractéristique *de l'endomorphisme* u *(resp. de la matrice* A*) est* $\chi_u(X) = \det(X\,\mathrm{id} - u)$ *(resp.* $\det(XI - A)$*).*

Comme tout déterminant, il ne dépend pas de la base choisie. Il vérifie par construction

PROPOSITION. *Les valeurs propres (le* spectre *de* u*) sont exactement les racines de* χ_u.

Par construction, χ est un polynôme de degré n (on va préciser certains de ses coefficients ci-dessous). Il en résulte

COROLLAIRE 4. *Un endomorphisme d'un espace de dimension* n *(resp. une matrice de taille* $n \times n$*) possède au plus* n *valeurs propres.*

Bien sûr dans $\mathbb{C}$ on a toujours n v.p. (mais elles ne sont pas forcément distinctes).

3.1.2 Propriétés de χ_u

On calcule un certain nombre de ses coefficients (pour u ou pour A) :

PROPOSITION.

$$\chi_u(X) = X^n - \mathrm{Trace}(u)X^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det u.$$

1. En dimension 2 on a donc, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc)$.
2. En dimension 3 il manque un terme : ce terme est la *somme des mineurs diagonaux* σ. On peut préférer développer le déterminant selon la définition (notamment quand la matrice contient plusieurs 0).
   Si $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, on calcule $\sigma = \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$, d'où
   $$\chi_A(\lambda) = \lambda^3 - (a+e+i)\lambda^2 + \sigma\lambda - \mathrm{Det}\, A.$$

Le polynôme caractéristique est donc **le** moyen de calculer les valeurs propres. On peut d'ores et déjà observer qu'il partage ses racines avec le polynôme minimal. De là à penser qu'il est annulateur…

Exemple *:* Soit A une matrice triangulaire (ou *a fortiori* diagonale), alors $\chi_A(X) = \prod(X - a_{i,i})$. Par exemple, le polynôme caractéristique de I est $(X-1)^n$. Plus généralement, une homothétie a une seule valeur propre, répétée n fois (la réciproque est fausse comme on le verra).

COROLLAIRE 5. *Les v.p. d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux.*

Dans ce cas, on voit agréablement que les v.p. de A^k sont les v.p. de A mises à la puissance k...

Exemple *:* Polynôme caractéristique de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} ?$$

Montrer que A et B ne sont pas semblables (considérer le rang de $A - 2I, B - 2I$).

PROPOSITION. *Le polynôme caractéristique est invariant par changement de base et par transposition.*

Il est néanmoins *mal nommé* : ainsi la matrice nulle et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ partagent le même polynôme caractéristique, sans être semblables pour autant... même leurs rangs diffèrent ! Voir aussi l'exemple précédent.

EXERCICE 8. *Montrer que* $\chi_{A.B} = \chi_{B.A}$, *au moins pour* A *inversible.*

EXERCICE 9. *Polynôme caractéristique d'une matrice compagne* $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$ *(développer par rapport à la dernière colonne, ou effectuer dans* $XI_n - A$ *la manip* $L_0 \leftarrow L_0 + XL_1 + \dots X^{p-1} L_{p-1}$*).*

DÉFINITION 5. *La* multiplicité *de la valeur propre* λ *est le plus grand entier* m *tel que* $(X-\lambda)^m \mid \chi_u(X)$.

Exemple : pour un projecteur, la multiplicité de la v.p. 1 n'est autre que le rang (ou encore la trace !).
On peut raffiner une proposition précédente :

PROPOSITION. *Le nombre des valeurs propres de* u, comptées avec leur multiplicité, *vaut au maximum* n. *Il vaut* n *exactement ssi le polynôme* χ_u *est scindé.*

Dans ce cas, si $\chi_u(X) = \prod (X - \lambda_i)^{m_i}$, on a

$$\text{Trace}(u) = \sum m_i \lambda_i \qquad \det(u) = \prod \lambda_i^{m_i}$$

3.2 Hérédité des polynômes annulateurs

On considère un sev stable F et, si nécessaire, une base adaptée $\mathfrak{B}$, i.e. une base de E dont les premiers vecteurs constituent une base de F. On peut donc parler de la restriction de u à F :

THÉORÈME 6. *Le polynôme caractéristique (resp. minimal) de la restriction de u divise celui de u.*

Démonstration. On écrit $M = \mathfrak{M}_{\mathfrak{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$ où A est la matrice de la restriction. On a donc

— Pour tout polynôme P, $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & C' \\ O & P(B) \end{pmatrix}$ et donc μ_M annule A, *ie* $\mu_A \mid \mu_M$.

— $\det(XI_n - M) = \begin{pmatrix} XI_p - A & -C \\ O & XI_{n-p} - B \end{pmatrix}$ et en calculant par blocs il vient $\chi_A \mid \chi_M$.

♦

NB : le calcul par blocs vient de la propriété $\operatorname{Det}\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} = \operatorname{Det} A \times \operatorname{Det} B$ qui se démontre bien par manipulations élémentaires.
On sait donc « passer à la restriction ». Ce théorème a de nombreuses conséquences :

THÉORÈME 7. *Soit λ une v.p. de u. Alors la dimension du sev propre $E_\lambda = \operatorname{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{id})$ est inférieure (ou égale) à la multiplicité de λ dans χ_u.*

En effet, sur $F = E_\lambda$ on a $\chi_{u_F}(X) = (X - \lambda)^{\dim F}$.

EXERCICE 10. *Montrer que si $\chi_u = \prod (X - \lambda_i)^{m_i}$ est scindé, alors* $\dim[\operatorname{Ker}(u - \lambda_i\,\mathrm{id})^{m_i}] \leqslant m_i$.

Exemple : Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ou $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, dont le pol. car. est $(X-1)(X-2)^2$, quelle est la dimension de E_2 ?
On a aussi l'essentiel

THÉORÈME DE CAYLEY-HAMILTON.
Le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique : $\mu_u \mid \chi_u$.
Ou encore : le polynôme caractéristique annule u : $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

C'est sans doute le théorème à l'énoncé le plus court du monde !

Démonstration. Montrons que $\chi_u(u)(x) = 0$ pour tout $x \in E$. Soit x fixé (non nul !) et considérons les familles de la forme $(x, u(x), u^2(x), \dots, u^{m-1}(x))$. Il existe un plus grand entier m tel que la famille soit libre – par exemple, $m = 1$ ssi x est un vecteur propre. On a $m < +\infty$ puisque la famille $\mathrm{id}, u, \dots, u^{n^2}$ est liée !
On peut écrire par définition de m

$$u^m(x) = -\big(b_0.x + b_1.u(x) + \ldots + b_{m-1}.u^{m-1}(x)\big)$$

Posons $F = \operatorname{Vect}(x, u(x), u^2(x), \dots, u^{m-1}(x))$; il est clair que F est stable par u, la matrice de la restriction étant une matrice compagne. Son polynôme caractéristique est

$$\chi_{u_F}(X) = (X^m + b_{m-1}X^{m-1} \ldots + b_0)$$

Il divise χ_u, mais il vérifie $\chi_{u_F}(u)(x) = 0$, par construction. On en déduit

$$\chi_u(u)(x) = \text{un polynome}(u) \circ \chi_{u_F}(u)(x) = 0.$$

♦

Exemple : Le vérifier sur les matrices A et B de l'exemple précédent. Que peut alors valoir leur polynôme minimal ?

EXERCICE 11. *On reprend* $\chi_u = \prod (X - \lambda_i)^{m_i}$ *scindé, montrez que* $\bigoplus \mathrm{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{id})^{m_i} = E$ *et en déduire que* $\dim[\mathrm{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{id})^{m_i}] = m_i$ *(attention, ces noyaux ne sont pas des espaces propres).*

EXERCICE 12. *Montrer directement le théorème de* CAYLEY-HAMILTON *dans le cas particulier où* u *(ou* A*) est diagonalisable (* voire trigonalisable).*

La suite du programme va consister à casser χ_u pour en déduire une décomposition de E en sev stables.

4 Diagonalisation

DÉFINITION 6. u *est diagonalisable* $\iff$ E *est la somme (toujours directe) des sev propres de* u*.*

Il revient au même de dire que
- E admet une base constituée de vecteurs propres pour u, ou encore
- qu'il existe une base de E dans laquelle $\mathrm{Mat}(u)$ est diagonale (d'où le nom !).

Exemple : Tout projecteur (resp. toute symétrie : $s^2 = \mathrm{id}$) est diagonalisable, avec deux espaces propres qui sont supplémentaires. Par définition même, toute affinité est diagonalisable (en un sens général, tout endomorphisme diagonalisable apparaît comme une affinité dans une base adéquate).

4.1 Caractérisation

THÉORÈME 9. • u *est diagonalisable ssi*
- *il existe* **UN** *polynôme annulateur, scindé et à racines simples, ssi*
- **LE** *polynôme minimal est scindé à racines simples.*

Remarque : le polynôme annulateur utilisé n'est pas forcément le polynôme minimal car on peut rajouter des racines qui n'ont rien à voir.

Démonstration.
• Supposons que $(X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_p)$ annule u, les λ_i étant distincts. Par le théorème de décomposition des noyaux, il vient

$$E = \mathrm{Ker}\, 0 = \mathrm{Ker} \prod (u - \lambda_i \mathrm{id}) = \bigoplus \mathrm{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{id})$$

• Réciproquement, si u est diagonalisable, soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ses v.p. et $P(X) = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_p)$. Il est clair que $P(u)$ vaut 0 sur chaque espace propre, donc sur leur somme E.
• Si un polynôme est scindé à racines simples, tout diviseur est de même. ♦

En pratique :

PROPOSITION. *Soit* $\chi_u(X) = \prod (X - \lambda_i)^{m_i}$ *scindé, alors* u *est diagonalisable ssi le polynôme* $R(X) = \prod (X - \lambda_i)$ *est annulateur. C'est alors le polynôme minimal.*

En effet, par Cayley-Hamilton le polynôme minimal est certainement de la forme $\mu_u(X) = \prod(X-\lambda_i)^{k_i}$ avec $1 \leqslant k_i \leqslant m_i$, et u est diagonalisable ssi $\forall i\ k_i = 1$.
NB : le polynôme R est hors-programme, il s'appelle le **radical** de χ_u.

Exemple : Toute symétrie s est diagonalisable, puisque $X^2-1 = (X-1)(X+1)$, scindé et à racines simples, est annulateur.
En revanche, il y a une discussion pour un endomorphisme de rang 1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1 et x un vecteur directeur de l'image, alors $u(x) \in \mathrm{Im}(u)$ et donc x est vecteur propre, associé à une v.p. λ. On en tire pour tout $z \in E$ $u^2(z) = u(u(z)) = u(x) = \lambda x = \lambda u(z)$ et donc $u^2 = \lambda u$. Si $\lambda \neq 0$ on peut dire que u est diagonalisable ($u = \lambda \times$proj), sinon c'est faux, car l'image est incluse dans le noyau ($u^2 = 0$) : le polynôme annulateur (minimal ici) X^2 est certes scindé, mais il n'est pas à racines simples.

Exemple : Toujours avec
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$
montrer que A est diagonalisable mais que B ne l'est pas (rappel : $\mu_B = (X-1)(X-2)^2$).

REMARQUE 8.
En général, on peut seulement dire que le polynôme "radical" $R(X) = \prod\limits_{\lambda \in Sp(u)} (X-\lambda_i)$ *divise le minimal* $\mu_u(X)$*, qui lui-même divise le polynôme caractéristique* $\chi_u(X)$*.*
La CNS de diagonalisabilité est que les deux ***premiers*** *polynômes soient identiques :*
$$\prod_{\lambda \in Sp(u)} (X-\lambda_i) = \mu_u(X).$$

$$\boxed{\textit{Retenir que } \chi_u \textit{ est hors-jeu } \textbf{\textit{pour ce qui est de diagonaliser}}.}$$

Dans le cas (automatique dans $\mathbb{C}$*) où* χ_u *est scindé, on a*
$$R(X) = \prod_{\lambda \in Sp(u)} (X-\lambda_i) \text{ qui divise}$$
$$\mu_u(X) = \prod_{\lambda \in Sp(u)} (X-\lambda_i)^{d_i} \text{ qui divise}$$
$$\chi_u(X) = \prod_{\lambda \in Sp(u)} (X-\lambda_i)^{m_i}$$
avec $1 \leqslant d_i \leqslant m_i$*, la CNS de diagonalisabilité est que les* d_i *valent 1. Bien sûr c'est vérifié* ***dès que*** $m_i = 1$ *! (condition* ***suffisante****)*

Cette proposition est commode, notamment pour vérifier rapidement qu'un endomorphisme n'est **pas** diagonalisable. Un cas très fréquent est le suivant :

LEMME 1. *Si* u *n'a qu'une valeur propre et* u *n'est pas une homothétie, alors* u *n'est pas diagonalisable.*

Une belle propriété d'hérédité se déduit facilement du critère : si on a un polynôme annulateur SARS, alors il convient aussi pour toute restriction de u, et donc

COROLLAIRE 6. *Si u est diagonalisable, alors toute restriction de u à un sev stable l'est. Dans ce cas, les sev stable sont les sev qui admettent une base de vecteurs propres.*

Exemple : Les sev stables de A dans l'exemple précédent sont

- Les sev triviaux $\{0\}$ et $\mathbb{R}^3$.
- La droite propre E_1.
- Toute droite incluse dans E_2.
- Le plan E_2.
- Tout plan somme de E_1 et d'une droite incluse dans E_2.

Pour B c'est moins trivial, il y a deux droites stables qui sont les espaces propres. Leur somme est un plan propre, et il y a un autre plan propre qui est $\mathrm{Ker}(B-2I)^2$.
Pratiquement, on écrit

$$\chi_u(X) = \prod (X-\lambda_i)^{m_i}$$

et on regarde si $R(X) = \prod(X-\lambda_i)$ est encore annulateur. Ou alors, on utilise le critère suivant (c'est plus un critère pratique que théorique, on regarde si l'on a assez de vecteurs propres pour fabriquer une base) :

THÉORÈME 10. *u est diagonalisable ssi χ_u est scindé* ***ET*** *la multiplicité de chaque v.p. est égale à la dimension de l'espace propre correspondant.*

Démonstration. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les v.p. (distinctes) de u, et α_i (resp. β_i) leurs multiplicités (resp. les dimensions des espaces propres correspondants). On sait que $\beta_i \leqslant \alpha_i$ (Thm. 3).
• Si u est diagonalisable, c'est que $\sum \beta_i = n = \sum \alpha_i$: donc $\forall i,\ \alpha_i = \beta_i$.
• Si χ_u est scindé, c'est que $\sum \alpha_i = n$. Si de plus $\forall i,\ \alpha_i = \beta_i$ alors $\sum \beta_i = n$, *ie* u est diagonalisable. ♦

On retrouve ainsi facilement le théorème 7 : on a alors

$$1 \leqslant \dim E_{\lambda_i} \leqslant m_i = 1!!$$

REMARQUE 9. *Attention ! Que χ_u soit scindé est nécessaire, mais pas suffisant, pour diagonaliser. On verra que c'est une CNS de* **trigonalisation**.
Si χ_u est scindé **et à racines simples**, *alors on est dans le cas élémentaire (condition* **suffisante** *de diagonalisabilité).*
Si il est scindé **avec des racines multiples, on ne sait rien !** *Il faut aller regarder de plus près.*
Par exemple $\chi_{\mathrm{Id}} = (X-1)^n \dots$

Exemple : Supposons que $\chi_u(X) = (X-\lambda)(X-\mu)^2$. On a donc $\dim E_\lambda = 1$ et $\dim E_\mu = 1$ ou 2. u ne sera diagonalisable que dans ce dernier cas.
Creusons : par Cayley-Hamilton et le lemme des noyaux il vient

$$E(=\mathbb{K}^3) = \mathrm{Ker}\big((u-\lambda\,\mathrm{id})\circ(u-\mu\,\mathrm{id})^2\big) = \mathrm{Ker}(u-\lambda\,\mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(u-\mu\,\mathrm{id})^2.$$

Comme $\mathrm{Ker}(u-\mu\,\mathrm{id}) \subset \mathrm{Ker}(u-\mu\,\mathrm{id})^2$ et que la dimension de ce dernier espace est 3-1=2, on a que u est diagonalisable $\iff$ $\mathrm{Ker}(u-\mu\,\mathrm{id}) = \mathrm{Ker}(u-\mu\,\mathrm{id})^2$.

Dans l'exemple en fil rouge

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

on vérifie que l'une est diagonalisable et l'autre pas en cherchant la dimension de E_2.

4.2 Diagonalisation d'une matrice carrée.

Une matrice carrée est dite diagonalisable ssi il existe un **changement de base** qui la rende diagonale (il en existe alors une infinité !). Autrement dit, A est diagonalisable ssi

$$\exists P \in \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{K}) \quad P^{-1}AP \ \text{ est diagonale.}$$

Le rapport avec la diagonalisabilité des endomorphismes est évident : u est diagonalisable ssi sa matrice dans une base quelconque l'est ! Pratiquement, c'est souvent ainsi que l'on procède.

Remarque utile : on écrit une matrice de passage P en alignant des vecteurs propres comme vecteurs colonnes ; si A est la matrice de départ, c'est en lui donnant « à manger » les vecteurs propres que son action sera lumineusement diagonale. On a donc la relation dans le sens

$$D = P^{-1}AP \qquad \Longleftrightarrow \qquad A = PDP^{-1}$$

Par pitié, notez bien que ce n'est PLUS A qui est diagonale (c'est D) : **changez de notation !**

4.3 Exemples

• Exemple 1 : la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}$.

Première méthode : on constate[2] (assez facilement...) que $J^2 = 3J$. Le polynôme

$$X^2 - 3X = X(X-3)$$

est scindé à racines simples et annule A, donc A est diagonalisable et ses v.p. sont dans l'ensemble $\{0, 3\}$. En fait, ce sont 0 **et** 3 car (cf. Lemme 1) une matrice diagonalisable avec une seule v.p. est une homothétie, donc déjà diagonale...
On cherche les espaces propres : E_0 est le plan d'équation

$$x + y + z = 0$$

et E_3 est la droite engendrée par $(1, 1, 1)$. La somme de leurs dimensions est 3, c'est fini. On peut choisir une base du plan, par ex $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, ce qui donne une matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(ce dernier résultat sans calculs !)

Deuxième méthode : A étant de rang 1, son noyau E_0 est de dimension 2, il reste forcément une AUTRE valeur propre, qu'on obtient par la trace : $3 = 0 + 0 + \lambda$. On achève

2. Inspiration dûe à la déesse NAMAGIRI.

comme ci-dessus, en remarquant peut-être que la droite image est forcément un espace propre !
Cet exemple montre qu'il est possible de ruser.
• Exemple 2 : la même matrice, mais modulo 3 ($\mathbb{K} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$).
Comme $J^2 = 0$, la seule v.p. est 0 et donc J n'est pas diagonalisable (puisqu'elle n'est pas nulle !) (alternativement, parce que μ_J n'est pas SARS).
Essayez la même matrice modulo p premier !
• Exemple 3 : la matrice circulante $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$.
Une technique consiste à remarquer que A est un polynôme en la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \; A = P(J) = aI + bJ + cJ^2 + dJ^3$$

Cette dernière matrice vérifie $J^4 = I$, comme on le voit sans calculs en suivant ce qui arrive aux vecteurs de base. On en déduit ses quatre (au plus. . .) v.p., qui sont $1, -1, i, -i$. On trouve les (des) vecteurs propres associés :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix}$$

Ce sont donc des vecteurs propres de A, et les valeurs propres associées sont $P(1), P(-1), P(i)$ et $P(-i)$.
On en déduit le déterminant (pas si évident !) de A :

$$\begin{aligned} \det A &= (a + b + c + d)(a - b + c - d)(a + ib - c - id)(a - ib - c + id) \\ &= (a^2 - b^2 + c^2 - d^2 + 2\,a\,c - 2\,b\,d)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2\,a\,c - 2\,b\,d) \end{aligned}$$

Remarque : l'ensemble de toutes ces matrices est donc la sous-algèbre des polynômes en J. La diagonalisation (simultanée) de toutes ces matrices circulantes est un isomorphisme avec la sous-algèbre bien plus simple des matrices diagonales. Ceci reste vrai en dimension n au lieu de 4.

• Exemple 4 : $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (Oral CCP) peut être diagonalisée de multiples manières :

1. Calcul du polynôme caractéristique $\chi_A(X) = X(X + 1)(X + 2)$.
2. Clairvoyance. Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est propre pour la v.p. -1. (on y pense en regardant les sommes de lignes) (ou pas).

   On trouve aussi un vecteur propre pour la v.p. 0 : $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; et un dernier pour la dernière v.p. -2 (qui se trouve en regardant la trace).

3. Le rang de A est 2. Donc $\dim E_0 = \dim(\operatorname{Ker} A) = 1$. 0 est v.p., il en reste deux, dont la somme est -3 d'après la trace de A. On pourrait trouver leur produit (2) qui est le dernier terme du polynôme caractéristique, càd la somme des cofacteurs diagonaux.

• Exemple 5 : (CCP) on demande $\lim\limits_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix}^n$.

1. Calcul du polynôme caractéristique $\chi_A(X) = (X-1)^2 + 1/n^2$. Les v.p. sont donc $1 \pm \frac{i}{n}$, on trouve les vecteurs propres $\binom{i}{\pm 1}$ qui ont l'avantage de ne pas dépendre de n. De ce fait on écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix}^n = P\begin{pmatrix} 1+\frac{i}{n} & 0 \\ 0 & 1-\frac{i}{n} \end{pmatrix}^n P^{-1} = P\begin{pmatrix} (1+\frac{i}{n})^n & 0 \\ 0 & (1-\frac{i}{n})^n \end{pmatrix} P^{-1} \to P\begin{pmatrix} e^i & 0 \\ 0 & e^{-i} \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} \cos 1 & \sin \\ -\sin 1 & \cos \end{pmatrix}$$

avec $P = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ par exemple, et $P^{-1} = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix}$. Le calcul de $\lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{i}{n})^n = e^i$ a été fait en polaires, faute de logarithme complexe :

$$(1+\frac{i}{n})^n = \left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)^n e^{n\, i \arctan \frac{1}{n}} = e^{\frac{n}{2}\ln(1+1/n^2)} e^{n\, i\arctan\frac{1}{n}} = e^{\frac{n}{2}(1/n^2 + o(1/n^2))} e^{n\, i\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \to e^{0+i}.$$

2. (autre méthode trouvée en simulation préparation d'Oral)

On écrit $A_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix} = I_2 + \dfrac{1}{n}B$ où $B^2 = -I_2$ d'où

$$A_n^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\frac{1}{n^k}B^k = \sum_{p=0}^{n/2}\binom{n}{2p}\frac{(-1)^p}{n^{2p}} I_2 + \sum_{p=0}^{(n-1)/2}\binom{n}{2p+1}\frac{(-1)^p}{n^{2p+1}} B = u_n I_2 + v_n B,$$

où l'on constate que

$$u_n + i v_n = \sum_{p=0}^{n/2}\binom{n}{2p}\frac{(-1)^p}{n^{2p}} + \sum_{p=0}^{(n-1)/2}\binom{n}{2p+1}\frac{i(-1)^p}{n^{2p+1}} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{i^k}{n^k} = \left(1+\frac{i}{n}\right)^n \to e^i.$$

On retrouve $\lim u_n = \cos 1, \lim v_n = \sin 1$ et la réponse demandée est $\boxed{\cos(1).I_2 + \sin(1).B.}$

3. Calculer la puissance n^{eme} par la méthode de la division euclidienne (cf. infra). On trouve une expression très similaire à celle de la méthode précédente.

• Exemple 6 : diagonaliser sans diagonaliser.

On cherche à calculer les puissances d'une matrice de rotation $A = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$.

• Si vous visualisez ce que fait une rotation, c'est assez évident.

• Si vous avez une idée du résultat, la récurrence est facile pour le prouver.

• Sinon... $\chi_A(X) = X^2 - 2X\cos t + 1 = (X - e^{it})(X - e^{-it})$ et donc A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$: il existe une matrice de passage $P \in \mathcal{G}\ell_2(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}$.

On a donc $P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} e^{nit} & 0 \\ 0 & e^{-nit} \end{pmatrix}$ et quitte à changer t en nt, on n'a pas besoin de calculer P (et encore moins P^{-1}, joie !) pour en déduire que A^n est la matrice de rotation d'angle nt : $A^n = \begin{pmatrix} \cos(nt) & -\sin(nt) \\ \sin(nt) & \cos(nt) \end{pmatrix}$.

C'est juste une version matricielle de la formule de MOIVRE...

• Exemple 7 : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

Exemple très ordinaire. Il vient $\chi_A(X) = (X+1)(X-1)^2$. On cherche E_1, c'est une droite (engendrée par $(1, -2, 5)$). La dimension (1) étant inférieure strictement à la multiplicité (2), A n'est PAS diagonalisable (Thm. 10).

Dans ces cas-là, on peut espérer opérer une...

5 Trigonalisation.

5.1 Le théorème

DÉFINITION 7. *Soit u un endomorphisme, il est* ***trigonalisable*** *ssi il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.*

Remarque : on passe de « triangulaire supérieure » à « triangulaire inférieure » en renversant la base.

DÉFINITION 8. *A est trigonalisable ssi il existe un changement de base qui la rende triangulaire (supérieure).*

Nous disposons alors d'un théorème (et un seul!!!) qui caractérise les endomorphismes (resp. les matrices) trigonalisables. [3]

THÉORÈME 11. *u est trigonalisable ssi χ_u est scindé dans $\mathbb{K}$.*

Même chose en remplaçant u par A. La démonstration fournit une méthode effective, mais très ingrate, de trigonalisation. Il en existe de meilleures, mais le programme s'arrête là.

Démonstration. Supposons χ_A scindé : il possède en particulier une racine au moins (!), soit λ, et un vecteur propre associé e_1. Complétons e_1 en une base : dans cette nouvelle base, A devient

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda & & \cdots & \\ 0 & & & \\ \vdots & & \text{B} & \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de B — qui est la matrice d'un endomorphisme de $\text{Vect}(e_2, \ldots, e_n)$ — divise celui de A_1, qui est celui de A. En particulier, il est scindé aussi. En conséquence, on peut appliquer à B une hypothèse de récurrence (puisque B est de taille $n-1$) et faire sur $(e_2, \ldots, e_n)$ un changement de base en $(e'_2, \ldots, e'_n)$ qui rende B triangulaire : dans la base $(\mathbf{e_1}, e'_2, \ldots, e'_n)$, on a la nouvelle matrice

$$A" = \begin{pmatrix} \lambda & & \cdots & \\ 0 & & & \\ \vdots & & \text{T} & \end{pmatrix} \qquad \text{où } T \text{ est triangulaire.}$$

Comme l'hypothèse de récurrence est trivialement vérifiée pour $n = 1$, le théorème est démontré. ♦

3. On trouve parfois "triangularisable".

Dans la pratique, on essaye de limiter au maximum le nombre de changements de base successifs !

Exemple : reprenons la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

On a trouvé $\chi_A(X) = (X+1)(X-1)^2$, E_1 est une droite (engendrée par $\varepsilon_1 = (1, -2, 5)$). E_{-1} est aussi une droite (évidemment), engendrée par $\varepsilon_2 = (0, 0, 1) = e_3$. On complète en une base par un vecteur (presque !) quelconque, par exemple $\varepsilon_3 = e_1 = (1, 0, 0)$.
En cherchant à la main les images de ces vecteurs exprimés par rapport à eux-mêmes, on trouve dans la nouvelle base la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{qui est bien sûr triangulaire.}$$

Un corollaire du théorème précédent est

COROLLAIRE 7. *Si le corps de base est $\mathbb{C}$, alors tout endomorphisme est trigonalisable.*

EXERCICE 13. *Dans ce cas, montrer la relation* $\text{Trace}(u^k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$ *où $\lambda_1 \dots \lambda_n$ sont les n v.p. de u (distinctes ou pas).*

On aura souvent intérêt à « passer dans $\mathbb{C}$ », c'est à dire à considérer une matrice réelle comme (provisoirement) une matrice complexe ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$!) pour la réduire, le temps par exemple de calculer ses puissances.

EXERCICE 14. *Convergence* ***en moyenne*** *de la suite des puissances de* $R = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$ *i.e. de* $\dfrac{1}{n+1}(I + R + R^2 + \dots R^n)$ *?*

EXERCICE 15. *Étudier après recherche sur Internet la méthode de* LEVERRIER *pour la recherche d'une valeur propre de module maximal.*

5.2 Des matrices fort peu diagonalisables

DÉFINITION 9. *On dit qu'un endomorphisme (ou une matrice) est* **nilpotent** *si il existe une puissance nulle : $\exists p \in \mathbb{N} \mid u^p = 0$. Le plus petit de ces p est* l'indice de nilpotence de u.

Notez en effet que si $u^p = 0$ alors *a fortiori* $u^{p+1} = u^{p+2} = \dots = 0$.
C'est matriciellement qu'on découvre la caractérisation suivante :

PROPOSITION. *Une matrice est nilpotente ssi son spectre (dans $\mathbb{C}$) est réduit à $\{0\}$. De manière équivalente, son polynôme caractéristique est X^n.*

Démonstration. Considérons une matrice nilpotente. Sa seule valeur propre est zéro puisque X^p est un polynôme annulateur. Dans $\mathbb{C}$, son polynôme caractéristique étant scindé et n'ayant que 0 comme racine, vaut X^n. ♦

COROLLAIRE 8. *Un endomorphisme est nilpotent ssi son polynôme caractéristique est scindé et a pour seule v.p. 0.*

COROLLAIRE 9. *L'indice de nilpotence (le plus petit p tel que $u^p = 0$) est au plus égal à n.*

Démonstration. Résulte de Cayley-Hamilton. ♦

Un cas important dans la pratique est celui des endomorphismes nilpotents **d'indice maximal n**, qui servent bien à trigonaliser des matrices autrement pénibles à traiter :

PROPOSITION. *Si u est nilpotente* **d'indice maximal**, *i.e. vérifie $u^n = 0 \neq u^{n-1}$, alors il existe une base de la forme $\mathfrak{B} = (u^{n-1}(x), u^{n-2}(x), \dots, u(x), x)$ dans laquelle la matrice de u est une **matrice de Jordan** :*

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Prendre $x \notin \operatorname{Ker} u^{n-1}$, vérifier que $\mathfrak{B}$ est libre. ♦

Je donne ce résultat en cadeau car il est à connaître, quoique pas au programme. Sachez donc redémontrer cette proposition.
Quel intérêt ? on rencontre souvent des polynômes caractéristiques de la forme $\chi_u(X) = (X-\lambda)^n$. Alors $u - \lambda\,\mathrm{id}$ est **souvent** de la forme précédente (c'est le cas ssi $\chi_u = \mu_u$).
Exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -5 & -3 & -6 \end{pmatrix}$, $\chi_A(X) = (X+1)^3$. On étudie $B = A + I = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ -5 & -3 & -5 \end{pmatrix}$, qui vérifie forcément $B^3 = (A+I)^3 = 0$ par CAYLEY-HAMILTON.
On « tente » une base de Jordan en appliquant B à un vecteur quelconque, par exemple e_1 :

$$B.e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, B^2.e_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Comme le dernier vecteur n'est pas nul (ouf !), on a trouvé une base dans laquelle **sans calculs !** la matrice devient

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{selon le sens d'énumération des vecteurs de la base.}$$

En un sens, entre les matrices diagonalisables et les nilpotentes on fait le tour de la question :

THÉORÈME DE DÉCOMPOSITION. *On suppose que u possède un polynôme annulateur scindé (i.e. que son polynôme minimal est scindé). Alors il existe une décomposition de E en somme directe de sous-espaces où u induit la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent :*

$$E = \bigoplus F_i \qquad u|_{F_i} = \lambda_i \operatorname{id}_{F_i} + n_i = h_i + n_i.$$

Démonstration. On considère un polynôme annulateur scindé, unitaire :
$P(X) = \prod (X - \lambda_i)^{m_i}$. Posons $F_i = \operatorname{Ker}((u - \lambda_i \operatorname{id})^{m_i})$, on a par le lemme des noyaux $E = \oplus F_i$ car les $(X - \lambda_i)^{m_i}$ sont premiers entre eux deux à deux.

Attention! F_i n'est pas l'espace propre $E_i = \operatorname{Ker}(u - \lambda_i \operatorname{id})$, c'est un sev plus grand (strictement en général). Un exercice classique est de montrer que u est diagonalisable ssi $\forall i\ F_i = E_i$.

1. Les F_i, noyaux de polynômes en u, sont des sev stables par u.
2. Soit u_i la restriction de u à F_i. Par définition de F_i, on a $\mu_i(X) = (X - \lambda_i)^{m_i}$ qui est un polynôme annulateur de u_i. Donc la seule valeur propre de u_i est λ_i, unique racine de ce polynôme annulateur.
3. Soit $h_i = \lambda_i \operatorname{id}_{F_i}$ l'homothétie de rapport λ_i dans F_i.
   Alors $n_i = u_i - h_i$ vérifie $n_i^{m_i} = (u_i - \lambda_i \operatorname{id}_{F_i})^{m_i} = 0_{\mathcal{L}(F_i)}$ (quel fameux 0 !), autrement dit u_i est somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent.

♦

Des théorèmes plus profonds mais hors-programme permettent de décomposer tout endomorphisme dont un polynôme annulateur est scindé (décompositions de Dunford, de Jordan). En particulier de telles décompositions existent toujours dans $\mathbb{C}$. Le théorème précédent peut fournir un procédé pratique pour trigonaliser une matrice (chercher des bases des F_i). À noter que dans le cas diagonalisable, les parties nilpotentes n_i sont nulles.

Exemple *:* On a vu que $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ n'était pas diagonalisable. On a la décomposition (sans changement de base ici car B est déjà triangulaire)

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} \qquad B_1 = (1) + (0) \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2I + N.$$

6 Calcul des puissances par division euclidienne

Le théorème de Cayley-Hamilton (ou, mieux, la trouvaille d'un polynôme annulateur en général) permet de calculer plus facilement que par diagonalisation les puissances d'une matrice. Donnons quelques exemples :

• Si A est par exemple une matrice 3×3 qui admet trois valeurs propres distinctes α, β, γ, on écrit *a priori*

$$X^n = Q.\chi_A(X) + aX^2 + bX + c$$

En donnant à X les trois valeurs racines de χ_A, il vient le système

$$\begin{cases} \alpha^n &= a\alpha^2 + b\alpha + c \\ \beta^n &= a\beta^2 + b\beta + c \\ \gamma^n &= a\gamma^2 + b\gamma + c \end{cases}$$

qui fournit a, b, c (noter le VANDERMONDE !). Il vient alors

$$A^n = aA^2 + bA + cI.$$

• En cas de valeurs propres multiples, on utilise le fait que si α est racine de double de P, alors il est aussi racine de P' (et ainsi de suite si nécessaire). Par exemple, en reprenant $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -5 & -3 & -6 \end{pmatrix}$, on écrit cette fois le système

$$\begin{cases} X^n & = & (X+1)^3 \times Q + & aX^2 + bX + & c \\ nX^{n-1} & = & (X+1)^2 \times Q_1 + & 2aX + & b \\ n(n-1)X^{n-2} & = & (X+1)^1 \times Q_2 + & & 2a \end{cases}$$

En remplaçant X par -1, on trouve un système qui donne encore plus vite a, b, c (il est triangulaire – mais contrairement à A, on n'a pas à le rendre tel !).
Ces techniques permettent de calculer des sommes de séries de matrices, comme

$$\exp A = \sum_{k \geqslant 0} \frac{A^k}{k!}.$$

Nous en reparlerons.

EXERCICE 16. *Calculer par cette méthode les puissances et l' exponentielle de*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$