

Sommabilité

par Emmanuel AMIOT

16 septembre 2019

Motivation

En étudiant les séries on a vu deux cas bien tranchés : convergence, ou divergence. En fait c'est plus complexe encore que cela, si on envisage la question plus générale de sommer une famille quelconque de nombres. Considérons le tableau à double entrée suivant :

???	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0

FIGURE 1 – Une série double non sommable

SI on essaye de faire d'abord la somme des lignes, puis la somme des résultats, on trouve $1+0+0+\dots = 1$. Si on commence par sommer en colonnes on trouve 0. D'autres ordres de sommation permettent de trouver 3 ou 42 ou -7 (amusez-vous à obtenir l'entier de votre choix)!

On peut même trouver *tout réel* en changeant l'ordre des termes d'une série. Prenons par exemple la série harmonique alternée et la procédure suivante :

Donner x
Poser s=0 p=0 q=1 n=0

```
Tant que n<1000 % (ou tout autre test d'arrêt)
  Si s<x faire s=s+1/(2p+1); p++; n++
  sinon faire s=s-1/(2q); q++; n++
  afficher s
```

On montre que cet algorithme converge vers x ,¹ qui apparaît donc comme la somme d'une série dont les termes sont exactement ceux de la série harmonique alternée mais dans un ordre différent.

Ce genre de comportement fait désordre. Nous allons introduire une notion qui permet d'y remédier, celle de sommabilité. Pour cela il faut se restreindre à des familles dénombrables.

EXERCICE 1. Écrire un programme Python qui entre une variable $x \in \mathbb{R}$ donnée par l'utilisateur ainsi qu'un entier n et imprime les n premières termes de la série définie ci-dessus : série harmonique alternée dérangée de manière à converger vers x .

1 Dénombrabilité

La plupart des ensembles de nombres utilisés en mathématiques sont infinis. Mais on s'est aperçu avec Georg Cantor qu'il y a infini... et infini (cf. Thm. 1 infra). Le plus petit infini est le cardinal de \mathbb{N} . Comme on sait faire des sommes infinies (pour n'importe quel cardinal), et parfois trouver leurs limites, on veut des limites d'ensembles infinis, informellement. C'est ce qui va nous imposer de travailler sur des ensembles d'indices dénombrables.

1.1 Définition et propriétés

DÉFINITION 1. Un ensemble est dénombrable ssi il est en bijection avec \mathbb{N} .

Pratiquement, un ensemble dénombrable X peut donc être étiqueté par les entiers : $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}$ puisque par définition il existe une application $i \mapsto x_i$, bijective, de \mathbb{N} dans X . La Proposition suivante est capitale car elle permet d'assouplir la condition de bijectivité.

PROPOSITION. Toute partie d'un ensemble dénombrable est finie ou dénombrable.

Démonstration. Laissant de côté le cas fini, une partie $Y \subset X$ où X est dénombrable est donc de la forme $Y = \{x_{i_0}, x_{i_1}, \dots\}$ en notant $I = \{i_0, i_1, i_2, \dots\}$ l'ensemble des i tels que $x_i \in Y$. L'application $p \mapsto x_{i_p}$ est alors une numérotation des éléments de Y i.e. une bijection de \mathbb{N} dans Y . ♦

EXERCICE 2. Prouver que l'image de \mathbb{N} (ou de tout ensemble dénombrable) par une application est encore dénombrable (ou finie).

L'importance de cette notion saute aux yeux avec

THÉORÈME (CANTOR, 1874). L'intervalle $X = [0, 1]$ est non dénombrable.

1. Les sommes partielles augmentent si elles sont en dessous de x , et redescendent quand elles le dépassent, la différence avec x étant majorée par $1/(2p+1)$ ou par $1/(2q)$.

A fortiori $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n, \mathbb{C} \dots$ ne le sont pas non plus. L'idée² de la démonstration (non exigible) est une des plus belles des mathématiques, et sert dans d'autres théorèmes très profonds (thm d'incomplétude de Gödel par exemple).

Démonstration. Supposons X dénombrable et numérotions ses éléments $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$. Tout x_n admet un développement décimal illimité :

$$x_n = \overline{0, x_{n1}x_{n2} \dots x_{nk} \dots x_{nn} \dots} = \sum_{k>0} x_{nk} 10^{-nk}$$

où les x_{nk} sont des chiffres, i.e. des entiers de 0 à 9.³

L'idée géniale de Cantor est de considérer le nombre $\omega = \overline{0, x_{11}x_{22} \dots x_{kk} \dots x_{nn} \dots}$ ou plutôt un dérangement de ce nombre : choisissons un dérangement des chiffres, c'est à dire une permutation qui envoie un chiffre sur un chiffre distinct (par exemple $\tau : c \mapsto c + 3 \pmod{10}$) et considérons $\omega = \overline{0, \tau(x_{11})\tau(x_{22}) \dots \tau(x_{nn}) \dots}$. Ceci définit bien un réel x dans $[0, 1]$, cependant sa n^e décimale n'est pas égale à x_{nn} , ce qui exclut que $x = x_n$. Donc x n'est pas dans la liste des éléments de X . Donc cet ensemble n'est pas égal à la liste de ses éléments indexée par \mathbb{N} , i.e. dénombrable. \blacklozenge

1.2 Ensembles dénombrables classiques

Par définition, \mathbb{N} est dénombrable, ainsi que toutes ses parties infinies d'après la Prop. 1. Des ensembles strictement plus « gros » au sens de l'inclusion et de l'intuition sont pourtant dénombrables, i.e. en bijection avec \mathbb{N} – magie de l'infini !

PROPOSITION. $\mathbb{N}^2, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ sont dénombrables.

Démonstration. Les dessins suivants montrent comment énumérer les éléments de \mathbb{Z} ou de \mathbb{N}^2 . Ensuite \mathbb{Z}^2 , étant en bijection avec \mathbb{N}^2 , est dénombrable. Enfin l'application de \mathbb{Q} dans \mathbb{Z}^2 définie par $p/q \mapsto (p, q)$ est injective⁴ ce qui identifie \mathbb{Q} à une partie (infinie !) d'un espace dénombrable et donc \mathbb{Q} est dénombrable. \blacklozenge

EXERCICE 3. Donner une formule explicite qui associe de manière bijective \mathbb{N} à \mathbb{Z} (s'inspirer du dessin).

À partir de ces cas on peut construire des ensembles dénombrables plus généraux. En imitant le procédé esquissé pour \mathbb{N}^2 on peut passer par récurrence à \mathbb{N}^k , d'où

PROPOSITION. Un produit cartésien FINI $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ d'ensembles dénombrables est encore dénombrable.

Un autre procédé important en pratique est légitimé par la

PROPOSITION. Une réunion d'un nombre fini ou dénombrable de parties dénombrables $X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n \cup \dots$ est encore dénombrable.
Plus généralement, une réunion d'un nombre fini ou dénombrable de parties finies ou dénombrables est finie ou dénombrable.

2. Lire « Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen ».

3. Il n'y a pas unicité d'un tel développement, mais on peut l'obtenir en écrivant tout nombre décimal, par exemple $1/4 = 0,25$, sous la forme $0,249999999 \dots$ et l'écriture de 1 dans ce contexte est $0,9999 \dots$. Je laisse de côté ce détail.

4. On prend pour p/q la représentation normale d'un rationnel, i.e. fraction irréductible avec $q \geq 1$.

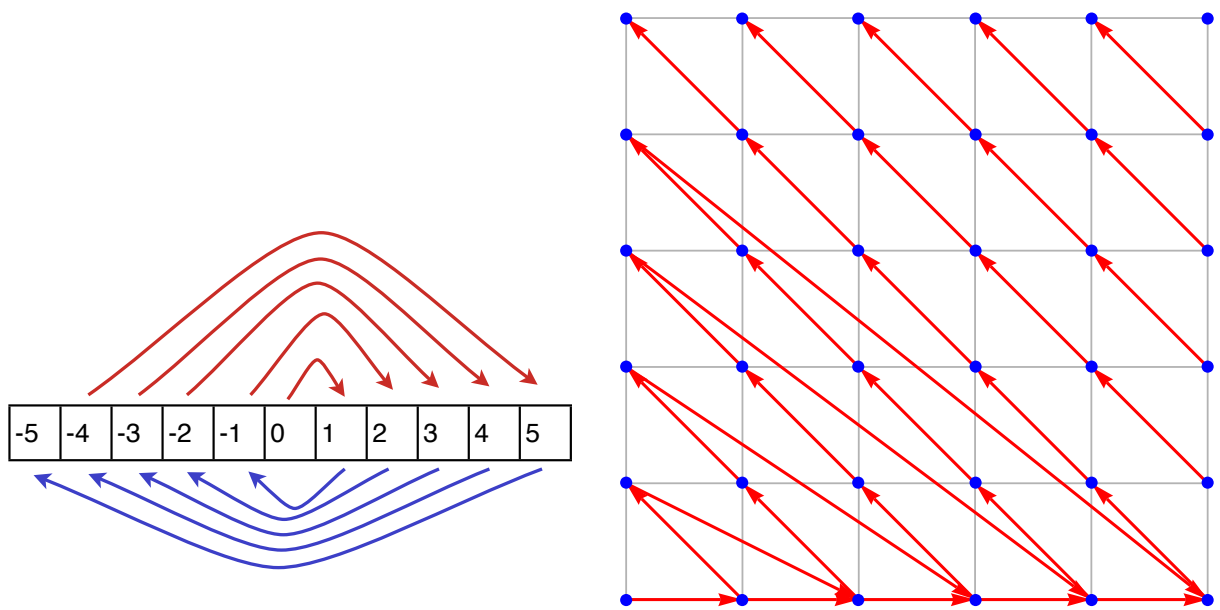


FIGURE 2 – Numérotations de \mathbb{Z} et \mathbb{N}^2

Démonstration. Considérons une famille $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ d'ensembles dénombrables $X_n = \{x_{n0}, x_{n1}, \dots, x_{nk}, \dots\}$. Pour tout $x \in X = \bigcup X_n$ il existe un, ou généralement des x_{nk} égaux à x . Posons $x = x_{n_{\min}k_n}$ où $n_{\min} = \text{Inf} \{n \mid \exists k, x = x_{nk}\}$ (on choisit le premier indice minimal), alors $x \mapsto (n_{\min}, k_n)$ est une injection de X dans \mathbb{N}^2 qui est dénombrable, ça roule. \blacklozenge

ATTENTION !!! Un **produit** dénombrable d'ensemble finis (ou a fortiori dénombrables) n'est pas dénombrable. Par exemple $\{0, 1, 2, \dots, 9\}^{\mathbb{N}}$ s'identifie via les développements décimaux illimités à $[0, 1]$ dont Cantor a montré la non dénombrabilité. Les deux dernières propriétés sont donc très différentes (dans la première on multiplie les cardinaux, dans la seconde on les ajoute). Un ensemble similaire important pour nous d'ensemble non dénombrable est $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ qui modélise une infinité (dénombrable!) de parties de pile ou face.

2 Sommabilité

On va définir (pour des famille dénombrables de réels ou de complexes) une condition qui permette de donner un sens cohérent à « la somme de la famille ». Notons pour commencer qu'il n'y a aucun problème ni aucune ambiguïté à définir la somme d'une famille finie, étant données la commutativité et l'associativité de l'addition. Les contre-exemples donnés permettent de comprendre qu'il n'en est pas de même avec des familles infinies. . .

2.1 Cas des familles de réels positifs

DÉFINITION 2. La famille $(u_i)_{i \in I}$ de réels positifs, indexée par l'ensemble dénombrable I , est sommable ssi les sous-sommes finies $\sum_{j \in J, J \text{ finie}} u_j$ sont bornées. On pose alors

$$\sum_{i \in I} u_i = \text{Sup}_{J \text{ finie}} \sum_{j \in J} u_j.$$

Un exemple fondamental : les termes d'une série convergente de réels positifs $(\sum u_i)$. En

effet on aura pour toute famille finie $J = \{j_0, \dots, j_N\}$ d'entiers

$$\sum_{j \in J} u_j = u_{j_0} + \dots + u_{j_N} \leq u_0 + u_1 + \dots + u_{\text{Max}(J)} = s_{\text{Max}(J)} \leq \sum_0^{\infty} u_i.$$

On a une définition claire de la somme de la famille, un sup (qui existe par définition).⁵ Cependant il n'est pas pratique de chercher la famille de tous les réels qui sont sommes d'une sous-famille finie, puis leur sup! L'intérêt de la notion est qu'on peut calculer cette somme de la façon qui nous plaît le mieux. C'est l'objet du puissant (et admis) **théorème de sommation par paquets**. Commençons par un

LEMME 1. *Toute sous-famille d'une famille sommable est encore sommable.*

Démonstration. Soit I' un sous-ensemble de l'ensemble d'indices I . Alors toute partie finie J de I' est une partie finie de I et donc

$$\sum_{j \in J} u_j \leq \sum_{i \in I} u_i \leq M.$$

♦

Ceci permet de considérer des « paquets », c'est à dire une partition⁶ de I :

THÉORÈME 2. *Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs.*

*On considère une **partition** de $I : I = \coprod_{k \in \mathbb{N}} I_k$. La famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable ssi*

- *Pour tout k , la sous-famille $(u_i)_{i \in I_k}$ est sommable, et*
- *$(\sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{i \in I_k} u_i)$ converge.*

Alors la somme de la famille est $\sum_{k=0}^{\infty} (\sum_{i \in I_k} u_i)$.

On dit qu'on a un *procédé sommatoire*. Par exemple on verra pour les séries doubles les partitions suivantes de $I = \mathbb{N}^2$:

- $I_k = \{(k, n), n \in \mathbb{N}\}$ (sommation par lignes) ;
- $I_k = \{(n, k), n \in \mathbb{N}\}$ (sommation par colonnes) ;
- $I_k = \{(p, q) \mid p + q = k\}$ (sommation en diagonale).

Remarque : dans l'expression $\sum_{k=0}^{\infty} (\sum_{i \in I_k} u_i)$, il est entendu que la somme sur k est séquentielle,

au sens usuel des séries (commencer par $k = 0$, puis ajouter le terme d'indice $k = 1$, etc).

En revanche, la somme intérieure, à k fixé, a le sens un peu ésotérique du sup des sommes sur les sous-ensembles finis de I_k . On va voir ci-dessous (Thm. 3) qu'en pratique, on peut énumérer les indices dans I_k par des entiers d'une façon quelconque et sommer sur I_k dans cet ordre, i.e. si $I_k = \{i_0, i_1, \dots, i_j, \dots\}$ alors tout simplement $\sum_{i \in I_k} u_i = \sum_{j=0}^{\infty} u_{i_j}$.

5. D'ailleurs si la famille n'est pas sommable on définit quand même sa somme (**dans le cas positif**) comme égale à $+\infty$.

6. Cela se voit à l'usage du symbole \coprod au lieu de \cup .

EXERCICE 4. Démontrer une partie du théorème : si la famille est sommable alors les sous-familles $(u_i)_{i \in I_k}$ sont sommables et $(\sum_k \sum_{i \in I_k} u_i)$ converge vers une valeur $\leq \sum_I u_i$. Une autre partie assez facile est que si un tel « procédé sommatoire » marche, alors la famille est sommable.

Le plus délicat est de montrer que tout procédé sommatoire permet de s'approcher du sup à moins de ε près (cf. des démonstrations en ligne).

Exemple : on trouve plus facilement la valeur de la somme de la série $\sum_{p \geq 0} \frac{1}{(2p+1)^2}$ - c'est $\frac{\pi^2}{8}$ - que celle de $\sum \frac{1}{n^2}$. Mais en écrivant, par paquets,

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \sum_{p \geq 0} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p \geq 1} \frac{1}{(2p)^2} = \sum_{p \geq 0} \frac{1}{(2p+1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$$

on en tire

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \sum_{p \geq 0} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exemple : $(\sum u_n)$ où $u_n \geq 0$, est une série convergente ssi la famille $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable ; et $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ (la somme de la famille est la somme de la série au sens usuel) : prendre $I_k = \{k\}$! Plus généralement on a même le

THÉORÈME DE CONVERGENCE COMMUTATIF.

Soit φ une permutation de \mathbb{N} et $(\sum u_n)$ une série convergente à termes positifs. Alors $(\sum u_{\varphi(n)})$ converge aussi, et les deux séries ont même somme.

Démonstration. Prendre $I_k = \{\varphi(k)\}$! ♦

EXERCICE 5. Démontrer ce théorème sans faire appel au Thm. 2 (montrer d'abord la convergence, puis l'égalité des sommes).

Noter que pour la série harmonique alternée on n'a PAS convergence commutative : en effet cette série ne converge pas absolument. Nous avons donc vaincu cette difficulté, ayant trouvé une condition qui permet d'éviter que les sommes d'une même famille soient diverses !

2.2 Cas complexe

DÉFINITION 3. Une famille dénombrable de complexes $(u_i)_{i \in I}$ est sommable ssi la famille des valeurs absolues l'est, i.e. ssi $(|u_i|)_{i \in I}$ est sommable.

Dans le cas où $I = \mathbb{N}$ on retrouve tout bonnement la convergence absolue d'une série. Un peu plus généralement, on a

- Une famille de réels $(u_i)_{i \in I}$ est sommable ssi les familles $(u_i^+)_{i \in I}$ et $(u_i^-)_{i \in I}$ le sont (on rappelle que $x^+ = \text{Max}(x, 0) \geq 0$, $x^- = \text{max}(-x, 0) \geq 0$ et qu'on a $x = x^+ - x^-$, $|x| = x^+ + x^-$).

— Une famille de complexes est sommable ssi les familles des parties réelles et imaginaires le sont.

EXERCICE 6. *Le démontrer.*

Cette définition a l'air de botter en touche, mais en fait c'est LA solution car on a (corollaire admis du Thm. 2)

THÉORÈME DE SOMMATION PAR PAQUETS, CAS COMPLEXE.

Si une famille est sommable, alors tout procédé sommatoire converge et donne la même valeur de la somme. Plus précisément, avec les hypothèses du théorème 2 :

— $I = \coprod_{k \in \mathbb{N}} I_k.$

— *Pour tout k , la sous-famille $(|u_i|)_{i \in I_k}$ est sommable, et*

— *$(\sum_k \sum_{i \in I_k} |u_i|)$ converge.*

Alors la somme de la famille $(u_i)_{i \in I}$ est $\sum_{k=0}^{\infty} (\sum_{i \in I_k} u_i).$

Retenir : on vérifie la sommabilité avec les valeurs absolues, on calcule la somme sans la valeur absolue.

En particulier, on fait la somme sur chaque paquet de la manière qui nous va le mieux (cf. Thm. 3). Il peut très bien arriver qu'on vérifie la sommabilité avec un procédé sommatoire et qu'on calcule la somme avec un autre (c'est même le cas le plus courant).

En pratique on utilise souvent la linéarité :

THÉORÈME 5. *Toute combinaison linéaire de deux familles sommables (avec le même ensemble d'indices) est encore sommable, et la somme de la combinaison linéaire est la combinaison linéaire des sommes.*

On peut donc parler de l'espace vectoriel des familles sommables à valeurs dans le corps \mathbb{K} indexées par I , $\ell_I(\mathbb{K})$. Avec $\|u\|_1 = \sum_{i \in I} |u_i|$ cela devient même un espace vectoriel normé.

EXERCICE 7. *Le démontrer.*

Démonstration. Le théorème comporte deux points, la sommabilité puis la valeur de la somme. Soient $(u_i), (v_i)$ deux familles sommables ($i \in I$ dénombrable), $\lambda, \mu \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Par hypothèse il existe deux constantes M, N telles que pour toute partie finie J de I on ait

$$\sum_{i \in J} |u_i| \leq M \quad \sum_{i \in J} |v_i| \leq N.$$

Il en résulte (les sommes étant finies) que $\sum_{i \in J} |\lambda u_i + \mu v_i| \leq |\lambda| M + |\mu| N$ d'où la sommabilité. Vérifions que la somme de la combinaison des familles est la combinaison des sommes. Par convergence commutative, et numérotation de l'ensemble des indices I , on se ramène à vérifier que

$$\sum_{n=0}^k \lambda u_{i_n} + \mu v_{i_n} \rightarrow \lambda \sum_{\mathbb{N}} u_{i_n} + \mu \sum_{\mathbb{N}} v_{i_n}$$

ce qui n'est pas un scoop à ce stade. ♦

3 Application aux séries doubles

Soyons francs, il n'est pas évident de savoir comment découper l'ensemble d'indices I pour établir la sommabilité d'une famille. . .

Dans le cas de \mathbb{Z} , il est naturel de sommer en deux paquets, les entiers positifs et les négatifs – attention à ne pas compter deux fois l'indice nul ! Une autre méthode naturelle consiste à prendre des paquets de la forme $I_n = \{-n, n\}$ (on regroupe les termes d'indices opposés).

Dans le cas où $I = \mathbb{N}^2$ (ou exceptionnellement \mathbb{Z}^2) on a plusieurs manières standard de procéder qui fonctionnent bien.

3.1 Sommation par tranches

En appliquant le théorème de sommation par paquets au découpage $\mathbb{N}^2 = \coprod I_n = \coprod \{(m, n) \mid m \in \mathbb{N}\}$, on a

PROPOSITION.

- Une famille de réels positifs $(a_{m,n})_{m,n}$ est sommable ssi pour tout n , la série $\sum_m a_{m,n}$ converge et la série de leurs sommes, $(\sum_n \sum_m a_{m,n})$ converge aussi.
- Dans ces conditions, $\sum_n \sum_m a_{m,n} = \sum_m \sum_n a_{m,n}$ (Fubini)
- Une famille de complexes $(a_{m,n})$ est sommable ssi pour tout n , la série $\sum_m |a_{m,n}|$ converge et la série de leurs sommes, $(\sum_n \sum_m |a_{m,n}|)$ converge aussi.
- Dans ces conditions, on a aussi $\sum_n \sum_m a_{m,n} = \sum_m \sum_n a_{m,n}$.

Retenir : on vérifie la sommabilité *avec les valeurs absolues*, on calcule la somme *sans la valeur absolue*. Notez bien qu'on a le droit, **une fois établie la sommabilité**, de sommer comme bon nous semble. En particulier on va voir au paragraphe suivant que sommer selon des diagonales peut être plus naturel que les tranches horizontales ou verticales !

Exemple : On pose $\zeta(n) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^n}$ pour $n > 1$. Avec la première partie du théorème précédent, il vient

$$\sum_{n \geq 2} (\zeta(n) - 1) = \sum_{n \geq 2} \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k^n} = \sum_{k \geq 2} \sum_{n \geq 2} \frac{1}{k^n} = \sum_{k \geq 2} \sum_{n \geq 2} \frac{1}{k^n} = \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k^2} \frac{1}{1 - 1/k} = \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k^2 - k} = 1$$

par télescopage.

Exemple : On considère $\sum_{p,q \in \mathbb{N}} \frac{1}{(p+q+1)^\alpha}$. En sommant sur les $I_n = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 \mid p+q = n\}$ il vient

$$\sigma_n = \sum_{(p,q) \in I_n} \frac{1}{(p+q+1)^\alpha} = (n+1) \frac{1}{(n+1)^\alpha} = \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$$

qui est un TGSCV si et seulement si $\alpha > 2$: c'est donc la condition de sommabilité de la famille. De plus, sa somme vaut $\zeta(\alpha - 1)$.

La famille non positive $\sum_{p,q \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^p}{(p+q+1)^\alpha}$ a la même condition de sommabilité. Mais attention :

$$\sigma'_n = \sum_{(p,q) \in I_n} \frac{(-1)^p}{(p+q+1)^\alpha} = \begin{cases} 0 & (n \text{ impair}) \\ \frac{1}{(n+1)^\alpha} & (n \text{ pair}) \end{cases}$$

est un terme de série (absolument) convergente dès que $\alpha > 1$. Pour $\alpha \in]1, 2]$ on a une famille non sommable, dont on peut calculer une et même plusieurs sommes différentes.

La sommabilité s'établit avec la famille des valeurs absolues.

3.2 Produit de deux séries

Dans ce paragraphe on considère des séries doubles particulières, familles à deux indices de la forme $(a_p b_q)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$: formellement le terme général de la famille est produit des termes généraux de deux séries, $(\sum a_p)$ et $(\sum b_q)$.

Si on cherche à vérifier la sommabilité par tranches, on voit qu'il faut que $\forall q \sum_p |b_q| |a_p|$ converge, i.e. que la série $(\sum a_p)$ soit absolument convergente, puis de même la série $(\sum b_q)$ soit absolument convergente. Réciproquement on a alors la convergence de $\sum_q |b_q| \sum_p |a_p|$ c'est à dire la sommabilité. On peut donc utiliser tout procédé sommatoire pour calculer la somme de la famille. Sommer par tranches donne $\sum_q b_q \sum_p a_p$ c'est à dire le produit des sommes des deux séries simples. Dans ce contexte on utilise souvent le procédé sommatoire suivant :

DÉFINITION 4. Le produit de Cauchy des séries $(\sum a_p)$ et $(\sum b_q)$ est la série de terme général

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 = \sum_{p=0}^n a_p b_{n-p} = \sum_{(p+q=n)} a_p b_q$$

$(\sum c_n)$ s'appelle le **produit de Cauchy** des deux séries.

NB : si $a_p = \alpha_p x^p, b_q = \beta_q x^q$ alors c_n est le terme en x^n du produit de polynômes (ou de séries entières comme on le verra plus tard).

De ce qui précède résulte l'important

THÉORÈME 6. Si $(\sum a_p)$ et $(\sum b_q)$ convergent **absolument** alors la série produit $(\sum c_n)$ converge (absolument) et sa somme est le produit des sommes :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n = \sum_{p \in \mathbb{N}} a_p \times \sum_{q \in \mathbb{N}} b_q.$$

Exemple : Les séries $\sum a^p/p!, \sum b^q/q!$ étant absolument convergentes pour $a, b \in \mathbb{C}$ fixés, si on dénote par $\varphi(a), \varphi(b)$ leurs sommes il vient

$$\varphi(a)\varphi(b) = \sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{a^p}{p!} \sum_{q \in \mathbb{N}} \frac{b^q}{q!} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{p=0}^n \frac{a^p}{p!} \frac{b^{n-p}}{(n-p)!} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^p b^{n-p} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!} (a+b)^n = \varphi(a+b)$$

On reconnaît la relation fonctionnelle d'une fonction exponentielle (en fait $\varphi = \exp$).

EXERCICE 8. On est parfois tenté de faire un produit plus simple, c'est à dire terme à terme! Mais :

- Est-ce que la convergence de $(\sum a_n)$ et $(\sum b_n)$ entraîne celle de $(\sum a_n b_n)$? (essayer avec une série alternée. . .)
- Même question avec la convergence absolue des deux séries.
- Est-ce que, même dans un cas de convergence, on a

$$\sum_{n>0} a_n b_n = \sum_{n>0} a_n \times \sum_{n>0} b_n ?$$

Exemple : en fait le délicat théorème de MERTENS (hors-programme) établit que si $(\sum a_p)$ converge **absolument** et $(\sum b_q)$ converge tout court, alors la série produit $(\sum c_n)$ converge – mais pas absolument.

Par exemple si (pour $n \geq 1$) on prend $a_n = (-1)^n/n^2$ et $b_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ alors il vient

$c_n = (-1)^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2(n+1-k)}$ qui est un terme de série alternée semi-convergente : par décomposition en éléments simples il vient⁷ en effet

$$(n+1)|c_n| = \frac{2}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \rightarrow \frac{\pi^2}{6}.$$

On a aussi que si les trois séries convergent (pas absolument) alors leurs sommes se correspondent bien : $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n = \sum_{p \in \mathbb{N}} a_p \times \sum_{q \in \mathbb{N}} b_q$.

Mais en tout cas, comme on l'a vu plus haut (avec $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$), le produit de deux séries non absolument convergentes peut très bien être divergent!

EXERCICE 9. Montrer que la série $(\sum \frac{(-1)^{n-1} H_n}{n})$ converge (où $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$). On

pourra utiliser le développement de H_n sous la forme $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n}$ obtenu au chapitre précédent.

En déduire que le produit de Cauchy de $(\sum \frac{(-1)^n}{n})$ par elle-même converge.

Cet exercice démontre que la condition de CV absolue de l'une ou des deux séries n'est pas nécessaire, seulement suffisante.

7. Cela donne que $c_n \sim (-1)^n/n$, ce qui est insuffisant. Avec plus de travail il vient que $c_n = \frac{(-1)^n}{n} + O(\frac{\ln n}{n^2})$.