Convergence des suites et séries de fonctions

25 septembre 2019

Dans ce qui suit, nous nous intéresserons à la convergence des suites et séries de fonctions. Comme on le verra, il n'y a pas UNE bonne notion de convergence pour ces objets mathématiques, mais plusieurs.
Comme de juste, elles seront d'autant moins maniables qu'elles seront plus puissantes...
On considèrera sauf mention contraire des suites de fonctions numériques (à valeurs réelles ou complexes, donc) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont chaque terme f_n est défini sur une partie A d'un evn E. La théorie s'étend sans difficulté à un espace d'arrivée de dimension finie : il suffit d'étudier les composantes de l'application pour se ramener au cas précédent.

Une **série** de fonctions est une suite particulière, notée $(\sum f_n)$, la suite sous-jacente étant la suite des sommes partielles :

$$x \mapsto s_n(x) = f_0(x) + \ldots + f_n(x)$$

Les fonctions s_n sont parfaitement définies là où les f_n le sont.
Il faut bien concéder qu'une série de fonctions est un être mathématique remarquablement abstrait.

1 Convergence simple

Si l'on se demande comment définir la convergence d'une suite (ou série) de fonctions, l'idée qui vient le plus naturellement est de considérer la suite (f_n) *en chaque point* : si $a \in A$, on a une suite numérique $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$.
Ainsi en tout point x de $[0,1[$ la suite (x^n) tend vers 0.

DÉFINITION 1. *La suite* (f_n) *converge* simplement *sur* A *ssi pour tout* $a \in A$*, la suite numérique* $(f_n(a))$ *est convergente.*

En d'autres termes, la suite de fonctions converge en chaque point.
Bien entendu, s'il y a convergence simple, à chaque point a on peut associer l'unique valeur $\lim f_n(a)$. Ce qui définit une fonction sur A.

DÉFINITION 2. *La* limite simple *de la suite de fonctions (simplement convergente)* (f_n) *est la fonction définie par*

$$\forall a \in A \qquad f(a) = \lim_{n\to+\infty} f_n(a)$$

On peut aussi définir la convergence simple de la suite (f_n) vers la fonction f par :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \forall x \in A \qquad \exists n_0 \qquad \forall n \geqslant n_0 \qquad |f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$$

Par exemple, la suite $f_n : x \mapsto x/n$ tend simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

EXERCICE 1. *Quelle est la limite simple de la suite de fonctions* (x^n) *sur le segment* $[0,1]$ *?*
Quelle est la limite simple (on dit la somme) de la série $\sum x^n$ *sur* $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ *?*

Remarquer deux choses instructives dans cet énoncé d'exercice :

1. L'abus de notation : on ferait mieux d'écrire « la suite de fonctions $x \in [0,1] \mapsto x^n$ ». Enfin, c'est l'usage...

2. L'abus de langage : il est toujours dangereux de parler d'une limite alors que l'on n'a aucune garantie quant à son existence.

Un troisième phénomène mérite que l'on s'y attarde : alors que les fonctions de la première suite sont des plus régulières (des polynômes !), la limite ne l'est plus du tout (discontinue). En fait, comme on pourra le voir en exercice, la limite *simple* n'a aucune raison de conserver les propriétés des termes de la suite.

EXERCICE 2. *Est-ce qu'une limite simple de fonctions croissantes reste croissante ? Même question avec* **strictement** *croissantes.*

C'est pourquoi nous allons définir des notions plus compliquées, mais plus efficaces, de convergence. Elles vont en particulier permettre de conserver par *passage à la limite* des propriétés comme la continuité, l'intégrabilité, etc…

2 La convergence uniforme

2.1 Convergence uniforme d'une suite ou d'une série de fonctions

En fait, il y a aussi une idée simple derrière la notion de convergence uniforme : on veut exprimer que les fonctions f_n deviennent proches de leur « limite » f. Pour cela, il faut disposer d'une façon de mesurer la « proximité » :

DÉFINITION 3. *La suite de fonctions (f_n) converge vers f* ***uniformément sur*** *A ssi la suite numérique de terme général*

$$\|f - f_n\|_\infty = \operatorname*{Sup}_A |f - f_n|$$

est définie (au moins) à partir d'un certain rang, et tend vers 0.
De façon équivalente, si

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists n_0 \qquad \forall n \geqslant n_0 \quad \forall x \in A \quad |f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$$

Ainsi la suite des x/n converge uniformément vers 0 sur le segment $[0, 1]$ (ou tout autre segment, ou toute partie bornée), puisque sur cet intervalle $\|f_n\|_\infty = 1/n \to 0$. En revanche, sur $\mathbb{R}$ on a $\|f_n\|_\infty = +\infty$ donc il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

Autre exemple : la suite (x^n) converge uniformément vers la fonction nulle sur tout segment $[-\alpha, \alpha] \subset]-1, 1[$, mais ne converge pas uniformément sur leur réunion $]-1, 1[$. Ce phénomène est capital.

Dernier exemple : la suite $((x + x^n)^n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle sur $]-1, 1[$ (prendre $\ln |u_n(x)|$), mais on a $\operatorname*{Sup}_{x \in]-1,1[} |u_n(x)| = 2^n \to +\infty$ donc la convergence n'est pas uniforme.

REMARQUE 1.

- *Ceci exprime que les* **graphes** *des* f_n *deviennent indiscernables de ceux de* f *pour* n *grand. L'ordinateur ou les calculettes graphiques illustrent bien ce phénomène.*
- *Dans la pratique, il est rare que l'on puisse* calculer *le sup. Il est suffisant (et logiquement équivalent) de donner une* majoration *de la forme* $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \alpha_n$, *où* $\alpha_n \to 0$, *et ce* uniformément, *autrement dit indépendamment de* x *dans* A.
- *Dans de nombreux cas (par exemple dans l'espace des fonctions bornées sur* A*), l'application* $f \mapsto \operatorname{Sup}_A |f|$ *définit une norme d'espace vectoriel normé. La convergence uniforme est exactement la convergence pour cette norme, qu'on appelle donc* norme de la convergence uniforme, *et elle exprime que* f_n *tend vers* f *dans cet espace de fonctions.*
- *On définit ci-dessous la convergence uniforme d'une* **série** *de fonctions sur une partie* A *par la convergence uniforme de la suite des sommes partielles.*
- *La convergence uniforme est autant une propriété de la suite de fonctions que de la partie* A *de* E *: contrairement à la convergence simple, ou à la notion de continuité, qui sont des propriétés à établir en* chaque *point, l'adverbe « uniformément » signifie que l'on a affaire à une propriété liée à toute la partie* A *prise dans son ensemble. C'est une propriété* globale, et non locale.
- *La démarche pratique la plus courante consiste à étudier la convergence simple, qui donne une limite ; puis on s'interroge sur l'uniformité de cette convergence, cf. infra.*

***Exemple** :*

- La suite des fonctions $u_n : x \mapsto \sin(x + 1/n)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction sin. En effet, $|u_n(x) - \sin x| = |2 \sin \frac{1}{2n} \cos(x + \frac{1}{2n})| \leqslant \frac{1}{n} \to 0$ indépendamment de x.
- La suite des fonctions $u_n : x \mapsto (x + 1/n)^2$ converge simplement, mais pas uniformément sur $\mathbb{R}$, vers la fonction $x \mapsto x^2$. En effet, $|u_n(x) - x^2| \geqslant \frac{2x}{n}$ qui n'est pas borné sur $\mathbb{R}$ en en particulier ne tend pas vers 0 indépendamment de x.
- La suite de terme général $u_n : x \mapsto x^n(1 - x)$ converge uniformément vers la fonction nulle sur le segment $[0, 1]$. On le vérifie (exceptionnellement) en calculant le sup ($\sim 1/ne$).
- La série de terme général $x \mapsto x^n \ln x$ (pour $n \geqslant 1$, et chaque fonction étant prolongée par continuité en 0) ne converge *pas* uniformément sur $[0, 1]$ vers $x \mapsto \dfrac{x \ln x}{1 - x}$

Pour ce dernier exemple, examinons de plus près deux problèmes importants : la convergence uniforme des séries, et le *défaut* de convergence uniforme. Commençons par une propriété triviale mais utile :

PROPOSITION. *Si* (f_n) *converge uniformément vers* f *sur* A, *alors* (f_n) *converge aussi simplement vers* f *sur* A.

En d'autres termes, la CU est une propriété plus forte que la CS.

Nous en déduisons un critère très simple de non–convergence uniforme : la non–convergence simple ! si il existe un point $a \in A$ en lequel la suite $(f_n(a))$ diverge, il ne peut y avoir convergence uniforme sur A [1]. Dans la pratique, les choses se passent différemment : on a très souvent la convergence simple (ponctuelle) et l'on s'interroge sur l'uniformité de cette convergence (globale). D'où le critère :

THÉORÈME (CRITÈRE DE NON CONVERGENCE UNIFORME). *Soit la suite* (f_n) *convergeant simplement vers* f *sur* A, *elle converge non uniformément sur* A *ssi il existe une suite* (x_n) *de points de* A *telle que* $(f(x_n) - f_n(x_n))$ *ne tende pas vers 0.*

Dans la pratique, on exhibe souvent une suite telle que $|f(x_n) - f_n(x_n)|$ reste supérieur à une quantité fixée.

Démonstration. En effet, la conclusion est la négation de « $\sup |f - f_n| \to 0$ ». ♦

***Exemple** :* considérons la suite $nx^n(1 - x)$ sur $[0, 1]$. Elle tend clairement vers 0 en tout point (car

1. Plus généralement, la CU sur une partie implique la convergence uniforme sur toute SOUS-partie.

x^n l'emporte sur le n).
En prenant $x = x_n = 1-1/n$, on trouve $(1-1/n)^n \to 1/e > 0$. Il n'y a donc pas convergence uniforme (il y a une *bosse glissante* que l'on peut visualiser par une animation à l'ordinateur). Revenons à la convergence uniforme d'une série : puisqu'il faut passer par la convergence simple, on peut définir en tout point le *reste* de la série (sinon le problème de la CU ne se pose pas).

THÉORÈME (CONVERGENCE UNIFORME D'UNE SÉRIE).
Soit $\sum f_n$ une série de fonctions, qui converge en tout point de A vers f. La convergence est uniforme si la suite des restes

$$R_n = f - \sum_{k=0}^{n} f_k$$

tend vers 0 uniformément sur A, i.e. si

$$\operatorname{Sup}_A \Big|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k\Big| \to 0$$

Exemple : La série (trigonométrique) $\sum \frac{\sin nx}{n^2}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, car :

1. En tout point x il y a convergence absolue de la série numérique : on en déduit la convergence simple.
2. Le reste de la série est $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k>n} \frac{\sin kx}{k^2}$ et l'on a

$$|R_n(x)| \leqslant \sum_{k>n} \left|\frac{\sin kx}{k^2}\right| \leqslant \sum_{k>n} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{n}$$

   qui tend vers 0 *indépendamment de* x.

La combinaison des deux derniers théorèmes permettrait de donner (enfin) un critère de non-CU pour une série de fonctions (simplement convergente). Revenons au cas de

$$\Big(\sum_{n\geqslant 1} x^n \ln x\Big) \quad \text{, qui converge sur }]0,1[\text{ vers } \frac{x\ln x}{1-x} \text{ et vers 0 quand } x = \ 0 \text{ ou } 1.$$

Le reste est

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k \ln x = \frac{x^{n+1}\ln x}{1-x}$$

et un choix judicieux de $x = x_n$ permet de montrer que ce reste ne tend pas vers 0 *uniformément* : il suffit de prendre $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ et l'on a

$$R_n(x_n) = n\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^{n+1} \ln\Big(1-\frac{1}{n}\Big) \to \frac{1}{e} \neq 0$$

et donc $\|R_n\|_\infty \not\to 0$, càd qu'il n'y a pas CV uniforme. Dans la pratique, on peut souvent utiliser un critère plus simple, mais suffisant dans bien des cas :

PROPOSITION. *S'il existe une suite (x_n) dans A telle que $f_n(x_n)$ ne tende pas vers 0, il n'y a pas convergence uniforme de la série $(\sum f_n)$ sur A.*

C'est, en quelque sorte, un « critère de divergence grossière uniforme ».

Démonstration. On écrit que $f_n = R_{n-1} - R_n$. ♦

2.2 Conservation de la continuité par passage à la limite uniforme

Rappelons que la limite simple d'une suite de fonctions continues peut très bien ne plus l'être. D'où l'intérêt du résultat fondamental suivant :

THÉORÈME 3. *Soit $a \in A$. Si la suite (f_n) converge vers f uniformément sur A, et si chaque f_n est continue en a, alors f est continue en a.*

On généralise d'ailleurs ce théorème dans deux directions (la généralisation est admise) :

THÉORÈME DE LA DOUBLE LIMITE. *Soit a adhérent à A (ou $A \subset \mathbb{R}$ et $a = \pm\infty$ est limite d'éléments de A), alors la convergence uniforme sur A de la suite (f_n) permet d'écrire la relation*

$$\lim_{x \to a} \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \lim_{x \to a} f_n(x) \tag{1}$$

Dans la démonstration de la forme la plus générale il faudrait ci-dessous remplacer $f(a)$ (resp. $f_n(a)$) par $\lim\limits_{a} f$ (resp. $\lim\limits_{a} f_n$).

Démonstration. On peut toujours écrire pour $x \in A$ et $n \in \mathbb{N}$

$$|f(x) - f(a)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f(a) - f_n(a)| + |f_n(x) - f_n(a)|$$

Les deux premiers termes seront petits pour n grand à cause de la CU, le dernier pour x proche de a par continuité de f_n. Mais pour cela il faut que n soit fixé. Précisons :
Soit $\varepsilon > 0$ donné, et choisissons un n tel que

$$\forall x \in A \quad |f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon/3$$

Pour cette valeur de n, utilisons la continuité en a de f_n : il existe un $\alpha > 0$ tel que

$$|x - a| \leqslant \alpha \Rightarrow |f_n(x) - f_n(a)| \leqslant \varepsilon/3$$

En recollant tout cela, on obtient $|x - a| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$.

♦

On utilise souvent ce thm pour prouver la NON–CU : si la limite (simple) est discontinue alors que les f_n sont continues, c'est que le convergence n'est pas uniforme.

Exemple *:*
• La suite $(1 - x^n)$ converge uniformément vers la fonction constante 1 sur tout segment $[-\alpha, \alpha] \subset]-1, 1[$, mais ne converge pas uniformément sur $]-1, 1[$. La limite est une fonction continue sur tout segment, **et donc continue sur leur réunion** $]-1, 1[$**, bien que l'on n'ait pas convergence uniforme sur cet intervalle** $(\sup\limits_{]-1,1[} |1 - (1 - x^n)| = 1 \not\to 0)$. Ce phénomène est capital.

• la série $(\sum x^n \ln x)$ converge vers 0 pour $x = 1$, mais sa somme sur $]0, 1[$ est $\frac{x \ln x}{1-x}$ qui tend vers -1 en 1. C'est bien plus simple que l'argument donné plus haut pour établir la non–uniformité de la convergence sur $[0, 1]$. Quelques propriétés voisines du théorème :

COROLLAIRE 1.

— *Si la suite (f_n) converge vers f uniformément sur A, et si chaque f_n est continue sur A, alors f est continue sur A.*
— *Si la suite (f_n) converge vers f uniformément sur* ***un voisinage de*** *chaque point de A, et si chaque f_n est continue sur A, alors f est continue sur A.*
— *Si la série $(\sum f_n)$ converge uniformément sur (un voisinage de tout point de) A, et si chaque f_n est continue sur A, alors la somme de la série est continue sur A.*

REMARQUE 2. *On voit bien ici la différence entre les propriétés globales et locales. La continuité est une propriété locale : il nous suffit donc de pouvoir l'établir en chaque point, et ce à l'aide de la convergence uniforme, propriété globale, que l'on établit sur une partie.*

Revenons à l'evn $F = \mathcal{B}(A)$ des applications bornées sur A, muni de la norme de la CU. Supposons de plus A compacte (dans E) : alors toute application continue sur A est bornée. Nous venons de montrer que la limite **uniforme** d'une suite d'applications continues (et donc bornées) reste continue (et bornée!!!). Ce qui exprime une stabilité par passage à la limite **dans l'evn F** . En d'autres termes, un peu abstraits mais concis :

PROPOSITION. *Dans $F = \mathcal{B}(A)$, où A est un compact de E, le sous-espace vectoriel des applications continues est fermé pour la norme de la convergence uniforme.*

Même si cela paraît quelque peu abstrait, ce n'est qu'une paraphrase des résultats ci-dessus.
Un cas particulier très important :

THÉORÈME DE WEIERSTRASS.
Tout application continue sur un segment est limite uniforme d'une suite de polynômes.

Pour paraphraser la proposition précédente : le sev des fonctions polynômes est dense dans l'evn $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ muni de la norme $\| \|_\infty$.
La longue démonstration de ce théorème est hors-programme. Nous la ferons en exercice... de probabilités. Il existe une variante de ce théorème avec des polynômes trigonométriques.
À rapprocher de ce paragraphe : la section sur les théorèmes d'intégration et de dérivation de limites de suites (ou séries) de fonctions (cf. infra).

3 Convergence normale d'une série de fonctions

On l'a vu, il n'est pas très facile de prouver la convergence uniforme : pour l'instant, dans le cas — fréquent — d'une série de fonctions, il nous faut vérifier la convergence simple, puis calculer et majorer le reste. C'est bien souvent délicat. Heureusement, il est possible de donner des conditions suffisantes bien plus simples. Comme de juste, ces conditions suffisantes ne seront pas nécessaires (attention donc).
Revenons sur l'exemple de la série $\sum \frac{\sin nx}{n^2}$. Nous avions établi la convergence normale en majorant le reste indépendamment de x :

$$|R_p(x)| = |\sum_{n>p} \frac{\sin nx}{n^2}| \leqslant \sum_{n>p} |\frac{\sin nx}{n^2}| \leqslant \sum_{n>p} \frac{1}{n^2} = T_p$$

où T_p est le reste d'une série **numérique** convergente, et donc tend vers 0 **indépendamment** de la variable x.

DÉFINITION 4. *La série $(\sum f_n)$ est **normalement convergente** sur A ssi la série numérique $(\sum \|f_n\|_\infty)$ est convergente.*

Remarques :

1. On a encore affaire à une propriété **globale**, puisque l'on considère un sup sur A.
2. $\sum \|f_n\|_\infty$ est une série à termes réels positifs : il faut et il suffit que ses sommes partielles restent bornées.
3. Il faut déjà que chaque terme de cette série soit bien défini, *ie* que les f_n soient bornées!
4. Concrètement, il suffit de trouver une **série numérique majorante**, c'est à dire utiliser le critère suivant :

PROPOSITION. *La série $(\sum f_n)$ converge normalement ssi il existe des $\alpha_n \geqslant 0$ tels que*

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \|f_n\|_\infty \leqslant \alpha_n \text{ (càd } \forall x \in A\ |f_n(x)| \leqslant \alpha_n) \text{ et } (\sum \alpha_n) \text{ converge.}$$

C'est en effet le critère de la convergence absolue de $(\sum \|f_n\|_\infty)$.

Exemple :

— $(\sum \frac{1}{n}x^n \ln x)$ est normalement convergente sur $[0,1]$ (en prolongeant toutes ces fonctions par continuité en 0) car
$$|\frac{1}{n}x^n \ln x| = |\frac{1}{n^2}x^n \ln(x^n)| = |\frac{1}{n^2}X.\ln X| \leqslant \frac{M}{n^2}$$
où M désigne le sup de $X \mapsto |X.\ln X|$ (qui existe par continuité de cette fonction sur le segment étudié). Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, on a gagné.

— La série de FOURIER $(\sum a_n \cos nx)$ converge normalement $\iff$ $(\sum |a_n|)$ converge.

— La série de FOURIER $(\sum a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ converge normalement $\iff$ $(\sum |a_n|)$ ET $(\sum |b_n|)$ convergent (en effet c'est équivalent à la convergence de la série des sups, soit $\sum \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$).

THÉORÈME 6. *Une série qui converge normalement converge absolument et uniformément. Plus précisément si* $(\sum \|f_n\|_\infty)$ *converge, alors* $(\sum f_n)$ *et* $(\sum |f_n|)$ *convergent uniformément sur* A.

Observons tout de suite que la réciproque est fausse. On a donc des implications à sens unique :

Convergence normale $\Rightarrow$ convergence uniforme $\Rightarrow$ convergence simple.

Démonstration. Soit donc $(\sum f_n)$ une série normalement convergente sur A.

1. Montrons la convergence simple.
   Soit $x \in A$. Alors $(\sum f_n(x))$ est absolument convergente, par hypothèse. C'est une série numérique : donc elle converge dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Soit $f(x)$ sa somme.
2. Montrons que la convergence vers f est uniforme.
   Pour x quelconque dans A, on a
$$|R_n(x)| = |\sum_{k>n} f_k(x)| \leqslant \sum_{k>n} |f_k(x)| \leqslant \sum_{k>n} \|f_k\|_\infty$$
   qui est le reste d'une série convergente, et donc tend vers 0. Ce indépendamment de x, c'est à dire uniformément. ♦

Utilisons l'inégalité triangulaire :
$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \|\sum_{n=0}^{k} f_n\|_\infty \leqslant \sum_{n=0}^{k} \|f_n\|_\infty \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty$$
On en déduit par passage à la limite (l'application $\| \ \|_\infty$ étant continue, comme toute norme) que
$$\|\sum_{n=0}^{\infty} f_n\|_\infty \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty$$

Thème de recherche : *Soit une série de fonctions positives, uniformément convergente. Est-elle nécessairement normalement convergente ?*

4 Théorèmes de dérivation ou intégration

4.1 Intégration de la limite d'une suite ou série de fonctions.

Même quand la limite (simple) d'une suite de fonctions (f_n) existe et est continue, il n'est pas automatique que $\lim \int_a^b f_n = \int_a^b \lim f_n$.
Par exemple : la suite $x \mapsto f_n(x) = (n+1)\cos t \sin^n t$ converge vers 0 sur $\mathbb{R}$ (la puissance l'emporte sur le $n+1$). Néanmoins,
$$\int_0^{\pi/2} f_n = \left[\sin^{n+1} t\right]_0^{\pi/2} = 1 \qquad \text{et donc} \qquad \int_0^{\pi/2} \lim f_n = \int_0^{\pi/2} 0 = 0$$

Il faut donc être très circonspect avant d'échanger lim et $\int$ (ou dans le cas des séries, $\sum$ et $\int$). Néanmoins, on a le droit d'intervertir en cas de CV uniforme **sur un segment** :

THÉORÈME 7. *Si la suite de fonctions (f_n) continues sur $[a, b]$, converge uniformément sur $[a, b]$, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n$$

Attention ! ce théorème n'est valide que sur un **segment**. On verra une autre classe de théorèmes (de convergence dominée ou monotone) avec les intégrales généralisées.

Démonstration. Par hypothèse, $\|f - f - n\|_\infty \to 0$ et donc sera plus petit que tout $\varepsilon > 0$ donné pour tout rang $n \geqslant n_0$. On a donc successivement (par propriétés de l'intégrale)

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| \leqslant \int_a^b |f_n - f| \leqslant \int_a^b \|f_n - f\|_\infty = (b - a)\|f - f_n\|_\infty \leqslant (b - a)\varepsilon$$

ce qui prouve bien que $\int_a^b f_n$ tend vers $\int_a^b f$. ♦

CONTRE-EXEMPLES. *En calculant le sup, on vérifie la convergence uniforme de la suite $x \mapsto \dfrac{x^n e^{-x}}{n!}$ vers 0 sur $\mathbb{R}_+$; pourtant l'intégrale de cette fonction sur $\mathbb{R}_+$ vaut toujours 1 (par parties)!!!*
Par ailleurs, la CU est une condition suffisante (d'interversion), mais pas nécessaire. Par exemple on a vu en exercice que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt = 0 = \int_0^{\pi/2} \lim_{n\to\infty} \sin^n t \, dt$$

et ce, bien que la convergence ne soit pas uniforme (la limite des $\sin^n$ n'est pas continue).

On peut donner une précision d'ordre plutôt théorique (à garder pour une deuxième lecture) :

REMARQUE 3. *Si l'on pose, avec les mêmes notations, $h_n(x) = \int_a^x f_n$, et si $f_n \to f$ uniformément sur tout segment inclus dans I, alors la convergence de la suite (h_n) est uniforme itou, et sa limite h est $h : x \mapsto \int_a^x f$.*

EXERCICE 3. *Montrer que la suite $t \mapsto \sin^n t$ converge uniformément vers 0 sur $[0, \pi/2 - \eta]$ pour tout $0 < \eta < \pi/2$. A-t-on convergence uniforme sur $[0, \pi/2]$?*
Comment déduire néanmoins de ce qui précède que $\int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt \to 0$?

EXERCICE 4. *On suppose que $f : \mathbb{R} \to E$ est de classe $\mathcal{C}^2$ a une dérivée seconde bornée. Montrer qu'alors la suite $n\big(f(x + \frac{1}{n}) - f(x)\big)$ converge uniformément vers f' sur $\mathbb{R}$.*

Dans le cas d'une série, qui est le plus fréquent, on a le

THÉORÈME D'INTÉGRATION TERME À TERME.
Si la série de fonctions (f_n) continues sur $[a, b]$, converge uniformément sur $[a, b]$, alors (la série numérique) $\left(\sum \int_a^b f_n\right)$ converge et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$$

Exemple :

— La série $\sum x^n$ converge normalement sur $[-\alpha, \alpha]$ pour $0 < \alpha < 1$, donc

$$\ln(1-x) = \int_0^x -\frac{dt}{1-t} = \int_0^x \sum_{n\geqslant 0} -t^n \, dt = \sum_{n\geqslant 0} \int_0^x -t^n \, dt = -\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$$

et ce résultat est vrai $\forall x \in]-1, 1[$.

— De même on trouve le développement de la fonction arctan :

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad \forall x \in]-1, 1[$$

Approfondissons : cette dernière série converge en fait uniformément sur $[-1, 1]$ (grâce au TSA, qui donne la convergence en 1 et aussi une majoration uniforme du reste). Sa somme est donc continue sur cet intervalle. Comme cette somme coïncide avec $\arctan x$ – fonction continue de x – pour $|x| < 1$, un passage à la limite permet de prolonger la relation sur $[-1, 1]$:

$$\arctan 1 = \frac{\pi}{4} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

EXERCICE 5. *Démontrer que* $\ln(1+x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ *pour* $x \in]-1, 1]$ *(la borne supérieure de l'intervalle incluse).*

4.2 Dérivation de la limite d'une suite ou série de fonctions.

C'est plus délicat encore que le théorème précédent : par exemple la suite $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1/n}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $|x|$, qui n'est pas dérivable en 0 ! ! ! Pire, la fonction continue $x \mapsto \sum 4^{-n} \cos(9^n x)$ est non dérivable en tout point ! Enfin, la série $\sum \sin(nt)/n$ converge en tout point, et même uniformément sur de larges intervalles, vers une fonction $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux. . . mais en dérivant terme à terme on trouve la série grossièrement divergente $\sum \cos(nt)$!

En fait, le théorème que nous utiliserons est un corollaire du précédent :

THÉORÈME 9. *Soit* (f_n) *une suite de fonctions de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[a, b]$ *telle que :*

— *il existe* $c \in [a, b]$ *tel que* $f_n(c)$ *converge ;*
  (on se contente souvent d'une hypothèse plus grossière : f_n *converge* ***simplement*** *sur* $[a, b]$*)*

— *la suite* ***des dérivées*** *converge* ***uniformément*** *sur* $[a, b]$.

Alors f_n *converge vers une fonction* f *de classe* $\mathcal{C}^1$*, dont la dérivée est* $\lim f'_n$*. On a en résumé :*

$$\lim f'_n = (\lim f_n)'$$

Démonstration. On applique le théorème d'intégration de la limite uniforme à la suite f'_n sur $[c, x]$. ♦

THÉORÈME DE DÉRIVATION TERME à TERME.

Soit une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ *sur* $[a, b]$ *telle que* $\sum f'_n$ *converge* ***uniformément*** *sur* $[a, b]$ *et* $\sum f_n$ *converge* ***simplement*** *(ou même en un seul point) ; alors* $\sum f_n$ *existe, est de classe* $\mathcal{C}^1$*, et*

$$\sum f'_n = (\sum f_n)'$$

On peut bien évidemment itérer le TDTàT. Donnons l'énoncé avec une série de fonctions (cas le plus fréquent) :

COROLLAIRE 2. *Soit une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^p$ sur $[a,b]$ telle que les p premières séries dérivées $(\sum f_n), (\sum f_n'), (\sum f_n'') \dots (\sum f_n^{(p-1)})$ convergent **simplement**, et que $(\sum f_n^{(p)})$ converge **uniformément** sur $[a,b]$; alors $(\sum f_n)$ existe, est de classe $\mathcal{C}^p$, et sa dérivée $k^{\text{ième}}$ $(1 \leqslant k \leqslant p)$ se calcule par dérivation terme à terme.*

$$\sum f_n^{(k)} = (\sum f_n)^{(k)}$$

Démonstration. On intègre terme à terme la série $(\sum f_n^{(p)})$ et on remonte jusque à $(\sum f_n)$. ♦

Exemple *:* La série *des dérivées* de la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^x}$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$ où $a > 1$, car la valeur absolue de la dérivée du terme général est $\left|\frac{-\ln n}{n^x}\right| \leqslant \frac{\ln n}{n^\alpha}$ qui est un un terme de général de série numérique convergente, par comparaison à $\frac{1}{n^\beta}$ pour un $\beta \in]1,\alpha[$ (par croissance comparée, $n^\beta \times \frac{\ln n}{n^\alpha}$ tend vers 0). Il en est de même des séries des dérivées k fois, à savoir $\sum \frac{(-\ln n)^k}{n^x}$ grâce à la même comparaison. Donc la fonction ζ est $\mathcal{C}^\infty$ sur tout $[a,+\infty[$, et donc sur $]1,+\infty[$ et sa dérivée s'exprime comme la somme des dérivées.

Exemple *:* La série exponentielle converge normalement sur tout segment. La série des dérivées est la même série, donc on en déduit que $\exp' = \exp$. Plus généralement on trouve

$$\forall \alpha \in \mathbb{C} \qquad \left(e^{\alpha t}\right)' = \alpha e^{\alpha t}$$

Si on pose $e^{it} = \cos t + i \sin t$ i.e. $\cos t = \operatorname{Re}(e^{it})$, etc, on retrouve que $\cos'(t) = \cos(t+\pi/2)$ et $\sin'(t) = \sin(t+\pi/2)$.

4.3 Applications à la non-CU

Bien évidemment, les théorèmes précédents peuvent servir à démontrer qu'une suite (ou série) de fonctions ne converge PAS uniformément, si les conclusions de ces théorèmes se trouvent prises en défaut ! Ainsi l'exemple donné plus haut de la suite de fonctions $x \mapsto (n+1)\cos x \sin^n x$ met en défaut le théorème d'intégration de la limite (uniforme) : c'est donc qu'il n'y a pas CU (sur $[0,\pi]$).

5 Approximation des fonctions de la variable réelle

Cette section est capitale car elle sert autant à la construction théorique de l'intégrale qu'à donner des méthodes de calcul approché.

5.1 Les fonctions en escalier

On se place dorénavant sur un segment $I = [a,b]$ et on considère certaines fonctions de I dans un evn E de dimension finie. On ne précise donc pas la norme.

5.1.1 L'espace des fonctions en escalier

DÉFINITION 5. f *est une fonction en escalier sur* $[a,b]$ *ssi il existe une* subdivision

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b$$

telle que sur tout intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$, *la restriction de* f *soit constante.*

En étendant le contexte des définitions des fonctions $\mathcal{C}^k$ par morceaux, on peut dire qu'une fonction en escalier est une fonction *constante par morceaux.*

Faisons quelques remarques simples mais essentielles :

— Les valeurs aux points de la subdivision sont tout à fait quelconques. On verra qu'elles ne changent rien du point de vue de l'intégration.

— Il n'y a pas du tout unicité de la subdivision associée à une fonction en escalier : si $a_0, \dots, a_n$ convient (*ie* f est constante sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$) alors toute subdivision *contenant* $a_0, \dots, a_n$ convient. Une subdivision qui convient à une fonction en escalier f est dite *subordonnée*, ou *associée*, à f. Il nous faudra vérifier que les propriétés définies à partir d'UNE subdivision sont vraies pour TOUTE subdivision (associée).

EXERCICE 6. *Montrer que si $a_0, \dots, a_n$ et $a'_0, \dots, a'_p$ conviennent, il en est de même de la réunion de ces subdivisions. Est-ce encore vrai de leur intersection ?*

— Contrairement à une fonction quelconque, on peut caractériser une fonction en escalier par une quantité *finie* d'information. Cela est typique de la distinction entre des phénomènes réels et des phénomènes modélisés.
— On peut généraliser la définition d'une fonction en escalier à un intervalle quelconque, par exemple $\mathbb{R}$: on dira que f est en escalier sur $\mathbb{R}$ ssi elle est en escalier sur un segment et nulle ailleurs.

THÉORÈME 11. *L'ensemble des fonctions en escalier sur I est un sous-espace vectoriel de l'espace des applications de I dans E, E^I.*

Démonstration. Le seul point un peu délicat est la stabilité par somme, qui résulte de l'exercice ci-dessus : si f et g sont en escalier, alors on voit que $f+g$ est en escalier en considérant la réunion de deux subdivisions adaptées respectivement à f et à g. ♦

5.2 Approximation uniforme par une fonction en escalier

On se place dans l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur $I = [a, b]$. Rappelons qu'il s'agit de fonctions continues sur $[a, b]$ sauf en un nombre fini de points $a_1, \dots, a_n$ et prolongeables par continuité à gauche et à droite en ces points, c'est à dire encore que f coïncide sur les intervalles ouverts $]a_i, a_{i+1}[$ avec une fonction g_i continue sur $[a_i, a_{i+1}]$. Les fonctions en escalier sont continues p.m.
Il s'agit d'approcher les fonctions « quelconques » (tout de même continues p.m.) par des fonctions « simples », les f.e.

THÉORÈME D'APPROXIMATION UNIFORME SUR UN SEGMENT. *Toute fonction continue sur le segment $[a, b]$ est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions en escalier.*

Donnons tout de suite le

COROLLAIRE 3. *Toute fonction* continue par morceaux *sur le segment $[a, b]$ est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions en escalier.*

Il suffit dans ce dernier cas d'appliquer le théorème sur chacun des sous-intervalles où f est continue, i.e. de l'appliquer aux g_i (comme définies ci-dessus) et de recoller les suites $({}^i f_n)$ de fonctions en escalier sur chaque $[a_i, a_{i+1}]$ en une seule suite (f_n) sur $[a, b]$, en posant soigneusement $f_n(a_i) = f(a_i)$ et $f_n(x) = {}^i f_n(x)$ sur $]a_i, a_{i+1}[$.
La démonstration du théorème est plus délicate.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; E)$. Par le théorème de HEINE, on sait que f est mieux que continue : elle est uniformément continue sur $[a, b]$, c'est à dire que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall (x, y) \in [a, b] \times [a, b] \qquad |x - y| \leqslant \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leqslant \varepsilon$$

Montrons qu'il est possible d'approximer f à ε près par une fonction en escalier g, *i.e.* qu'il existe une f.e. g telle que $\|f - g\| \leqslant \varepsilon$ sur $[a, b]$. Considérons un α associé à ε, et une subdivision quelconque (par exemple régulière) dont le pas soit inférieur à α, c'est à dire que $\forall i \; 0 < a_{i+1} - a_i < \alpha$. Choisissons un point à l'intérieur de chaque $[a_i, a_{i+1}[$ — par exemple le milieu m_i, ou a_i — et définissons enfin g de la façon suivante[2] :

2. Se souvenir de cette construction à propos de la méthode des rectangles pour les intégrations numériques approchées.

— Si $x = a_i$ alors $g(x) = f(a_i)$.
— Si $x \in]a_i, a_{i+1}[$ alors $g(x) = f(m_i)$.
On constate alors sans peine, en appliquant la propriété de continuité uniforme, que dans tous les cas $\|f(x) - g(x)\| \leqslant \varepsilon$.
Pour construire une suite convergeant uniformément vers f sur $[a, b]$, on choisit $g_n = g$ construite comme ci-dessus pour $\varepsilon = 1/n$. ♦

La morale de cette démonstration est que l'on peut approcher le graphe de f d'aussi près que l'on veut par celui d'une fonction en escalier, quitte à réduire le pas *i.e.* à changer de « valeur constante » de plus en plus souvent.
Remarque : densité de sevn et approximation Les théorèmes précédents signifient tout simplement la densité de certains espaces dans l'espace des applications continues (par morceaux), muni de la norme de la convergence uniforme :

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{x \in I} \|f\|$$

Ainsi l'espace des f.e. est dense dans l'espace des fonctions continues, bien que leur intersection soit réduite aux fonctions constantes !

EXERCICE 7. *(délicat) Donner un exemple de fonction qui ne puisse pas être approchée uniformément par des fonctions en escalier.*