Espaces vectoriels normés – Classe de Spéciales MP

par Emmanuel AMIOT

28 février 2020

Introduction

Pendant pas mal de siècles, les notions de proximité, de limite étaient fondées plus sur l'intuition que sur une définition rigoureuse. On a fini par s'apercevoir au XIX$^{\text{ième}}$ siècle que cela était indispensable pour éviter de dire des bêtises (par exemple qu'une application continue serait dérivable partout, sauf en quelques points, comme l'affirma ABEL entre autres).

Cela ne fut possible qu'au moment où l'on disposa d'une construction rigoureuse de la droite réelle, qui servit de fondement à la rationalisation de l'idée ancienne mais farfelue d'« infiniment petit ». Cette notion reste toutefois un bon support pour l'intuition, à condition de s'en passer au moment d'effectuer une démonstration [1].

1 Norme et distance

Il s'agit d'une idée intuitive : avant de parler de proximité, il faut savoir mesurer des distances. On se place dans tout le chapitre dans le cadre d'espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Les boules

1.1.1 Norme et distance

DÉFINITION 1. *On appelle* norme *dans un espace vectoriel* E*, réel ou complexe, une application* N *telle que :*

1. $\forall x \in E \qquad N(x) \in \mathbb{R}_+$
2. $\forall x \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$
3. $\forall (x, y) \in E^2 \qquad N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$
4. $N(x) = 0 \iff x = 0$

E *muni de* N *est appelé un* espace vectoriel normé.

Ceci appelle quelques remarques :

— Un bref schéma fera comprendre pourquoi le troisième axiome s'appelle *l'inégalité triangulaire* : elle exprime que dans un evn le plus court chemin entre deux points est le segment qui les joint.

— $N(-x) = N(x)$. Dans le cas complexe, $N(e^{i\theta} x) = N(x)$.

— Dans un evn, on a $N(x-y) \leqslant N(x)+N(y)$! ! ! Par ailleurs, l'inégalité suivante est souvent utile :

$$N(x) - N(y) \leqslant N(x - y)$$

— En général, il n'y a pas besoin de démontrer l'équivalence dans le quatrième axiome : une implication résulte du second (le plus souvent, il est évident que $N(\vec{0}) = 0$).

— Il est de coutume de noter $\|x\|$ pour $N(x)$. On différencie le cas échéant diverses normes par des indices : $\|x\|_1, \|x\|_2, \ldots$ etc.

Exemple : Les applications suivantes sont des normes :

— Le module dans $\mathbb{C}$.

— La somme de deux normes.

— La norme euclidienne dans $\mathbb{R}^2$, $(x, y) \to \sqrt{x^2 + y^2}$.
Aussi $(x, y) \to \mathrm{Sup}(|x|, |y|)$ ou $(x, y) \to |x| + |y|$.
Ces normes sont les trois normes standard, $\| \ \|_2, \| \ \|_\infty, \| \ \|_1$, présentes dans tout espace vectoriel normé de dimension finie.

— Dans $\mathbb{R}[X]$, anneau des polynômes, l'application

$$N : P \mapsto N(P) = |P(0)| + |P'(0)| + |P''(0)| + \cdots + |P^{(n)}(0)| + \ldots$$

On commencera par montrer que cette application est bien définie !

— Dans l'espace $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ des suites numériques complexes bornées, l'application définie par $\mathbf{u} \mapsto \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n| = \|\mathbf{u}\|_\infty$ (cf. infra).

1. L'analyse dite NON STANDARD a axiomatisé cette notion, en rajoutant des nombres à $\mathbb{R}$. Cela soulève toutefois diverses difficultés — ne pas oublier de distinguer les « vrais » réels des autres, et admettre l'axiome du Choix.

— Dans l'espace des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$, $f \mapsto \operatorname*{Sup}_{[0,1]} |f|$ (norme de la convergence uniforme).

— Dans l'espace des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$, $f \mapsto \sqrt{\int_0^1 |f|^2}$ (cf. espaces préhilbertiens).

La norme sert, dans un espace vectoriel, non seulement à savoir la taille de quelque chose mais aussi de combien sont **distants** des objets.

DÉFINITION 2. *La distance entre les points* x *et* y *de* E *est* $d(x,y) = N(x-y)$.

On a les propriétés :

$$\begin{aligned} d(x,y) &\geqslant 0 \\ d(x,y) = 0 &\iff x = y \\ d(x,z) &\leqslant d(x,y) + d(y,z) \end{aligned}$$

qui résultent des axiomes définissant une norme [2].

1.1.2 Boules

Avec les normes on a aussi les boules :

DÉFINITION 3. *On définit les boules ouvertes et fermées de centre* $a \in E$ *et de rayon* $r \in \mathbb{R}$ *par :*

— $B(a,r) = \{x \in E \mid d(x,a) < r\}$

— $B_f(a,r) = \{x \in E \mid d(x,a) \leqslant r\}$

EXERCICE 1. *Dessiner* $B(0,1)$ *pour les trois normes données ci-dessus dans* $\mathbb{R}^2$.

Il n'est pas utile de considèrer des rayons négatifs ! et pour les boules ouvertes, on ne considèrera que des rayons **strictement** positifs.

EXERCICE 2. *Montrer que si deux boules ouvertes ont un point commun, alors elles contiennent toutes deux une même boule (ouverte) centrée sur ce point.*

Montrer que toute boule (non vide !) est convexe et symétrique.

1.2 Notions dérivées de la notion de norme

DÉFINITION 4. *Un vecteur* $x \in E$ *est dit* ***unitaire*** *ssi il est de norme égale à 1.*

EXERCICE 3. *Montrer que toute droite contient au moins un (combien ?) vecteur unitaire. Est-ce encore vrai si l'on prend* $\mathbb{Q}$ *comme corps de base ?*

Cet exercice illustre une transformation fondamentale, qui permet de passer de tout vecteur non nul à un vecteur unitaire de même direction.

DÉFINITION DE LA DISTANCE D'UN POINT À UNE PARTIE. *Soit* $x \in E$ *et* $A \subset E, A \neq \emptyset$ *; alors on pose*

$$d(x,A) = \operatorname*{Inf}_{a \in A} d(x,a)$$

Évidemment, il ne s'agit plus d'une distance au sens précédent. C'est néanmoins une notion utile et assez intuitive.

2. On le voit : la notion de distance est un peu moins forte. En fait, on démontre qu'une espace muni d'une distance — cela s'appelle un espace *métrique* — est toujours une partie d'une espace vectoriel normé.

COMMENT APPRIVOISER UN INF. *On montre de façon standard qu'il existe une suite* (a_n) *dans* A *telle que* $d(x, A) = \lim \|a_n - x\|$*. En effet, pour tout* n *et par définition d'un inf, il existe* $a_n \in A$ *tel que*

$$d(x, A) \overset{\text{puisque minorant}}{\leqslant} \|a_n - x\| \leqslant d(x, A) + 2^{-n} \quad \text{puisque ce n'est PAS un minorant}$$

Ce genre de construction est CAPITAL pour traduire pratiquement qu'on a un inf (ou un sup). Attention ! en général la suite des **vecteurs** (a_n) *est divergente, c'est la suite des* **distances** *qui converge (vers l'inf).*

EXERCICE 4.

- *Si* $d(x, A) = 0$*, est-ce que nécessairement* $x \in A$ *?*
- *Montrer que si* $A \subset B$ *alors* $d(x, A) \geqslant d(x, B)$.
- *Calculer la distance de l'application* $r : x \mapsto \sqrt{x}$ *à l'ensemble* A *des applications linéaires* $f_a : x \mapsto ax$ *dans l'espace* E *des applications continues de* $[0, 1]$ *dans* $\mathbb{R}$ *muni de la norme définie par* $\|f\|_1 = \int_0^1 |f|$.

DÉFINITION 6. *Une partie non vide* A *est dite* **bornée** *ssi elle est incluse dans une boule. Une application à valeurs DANS un evn est bornée ssi son image l'est.*

On démontre facilement (le faire !) la proposition suivante :

PROPOSITION.

- A *est bornée ssi la taille de ses éléments est bornée :*

$$\exists M > 0 \quad \forall x \in A \qquad \|x\| \leqslant M$$

- *La réunion, l'intersection de deux bornés est bornée.*

EXERCICE 5. *Après avoir démontré cette proposition, on pourra pour le plaisir montrer que la somme de deux bornés* $A + B = \{a + b \mid (a, b) \in A \times B\}$ *est bornée.*

EXERCICE 6. *Sur l'espace des applications continues de* $[0, 1]$ *dans* $\mathbb{R}$*, étudier le caractère borné ou pas de* $S = \{f \in E \mid \int_0^1 |f| = \pi\}$ *pour les normes suivantes :*

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{x \in [0,1]} |f(x)| \qquad \|f\|_1 = \int_0^1 |f| \qquad \|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f|^2\right)^{1/2}$$

THÉORÈME 1. *L'espace* $\mathcal{B}(A, F)$ *des applications bornées de* A*, partie de l'evn* E*, dans l'evn* F*, devient un evn quand on le munit de l'application*

$$N_\infty : f \mapsto N_\infty(f) = \operatorname*{Sup}_{A} \|f\|$$

Démonstration. Cette application est bien définie par hypothèse.

1. Il est clair que $\operatorname{Sup} \|f\| \geqslant 0$, puisque pour tout $x \in A$ on a $\|f(x)\| \geqslant 0$!
2. Pour tout $x \in A, \lambda \in \mathbb{K}$, on a $\|\lambda f(x)\| = |\lambda|.\|f(x)\|$. Donc

$$\operatorname*{Sup}_{x \in A} \|\lambda f(x)\| = |\lambda|. \operatorname*{Sup}_{x \in A} \|f(x)\|$$

3. Pour tout $x \in A$, et pour $f, g \in \mathcal{B}(A, F)$ on a

$$\|(f + g)(x)\| = \|f(x) + g(x)\| \leqslant \|f(x)\| + \|g(x)\| \leqslant N_\infty(f) + N_\infty(g)$$

d'où en passant au sup sur x l'inégalité triangulaire pour N_∞.

4. Enfin si $\operatorname{Sup} \|f\| = 0$ cela signifie que pour tout $x \in A$ on a $\|f(x)\| \leqslant 0$, c'est à dire que $f(x) = 0$. Donc f est nulle sur A, c'est l'application nulle alias le vecteur nul de $\mathcal{B}(A, F)$.

♦

Cas particulier capital (déjà cité) : l'espace des suites bornées à valeurs dans E, qui n'est autre que $\mathcal{B}(\mathbb{N}, E)$, est un evn muni de la norme

$$\|\mathbf{u}\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|$$

Un autre exemple : $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ qui est un sous-espace de $\mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$ puisque toute application continue sur un segment est bornée. On retrouve la norme de la convergence uniforme!

1.3 Applications lipschitziennes

Cette notion est la plus difficile à prononcer du programme.

DÉFINITION 7. *Soient* E, F *deux evn. L'application* f *de* E *dans* F *est dite* **lipschitzienne** *de rapport* k *ssi*

$$\forall x, y \in E \quad \|f(x) - f(y)\| \leqslant k \times \|x - y\|$$

On observera que le symbole $\| \ \|$ n'a pas le même sens des deux côtés du signe $\leqslant$.

UTILISER LE THÉORÈME DES ACCROISSEMENTS FINIS.
Une application f *de* $[a;b]$ *dans* $\mathbb{R}$ *telle que* $\operatorname{Sup}|f'| \leqslant M$ *sera* M*–lipschitzienne.*

De même, toute isométrie (les rotations du plan euclidien par exemple) est 1–lipschitzienne.

EXERCICE 7. *Que dire de la composée de deux applications lipschitziennes? Donner deux applications lipschitziennes de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*, dont le* ***produit*** *ne soit pas lipschitzien. Montrer que si les deux applications sont à la fois lipschitziennes et bornées alors le produit est lipschitzien.*

PROPOSITION. *Dans un evn* E*, les applications suivantes sont 1-lipschitziennes :*

$$x \mapsto \|x\| \qquad x \mapsto d(x, A)$$

où A *désigne une partie non vide fixée.*

Démonstration. Déjà $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\|$, c'est la deuxième inégalité triangulaire.
Soit maintenant $a \in A$ quelconque. On a

$$d(x, A) \leqslant \|x - a\| \leqslant \|x - y\| + \|y - a\| \iff d(x, A) - \|x - y\| \leqslant \|y - a\|$$

On a trouvé un minorant de $a \mapsto \|y - a\|$, qui est par définition majoré par le plus grand des minorants quand a varie dans A, à savoir $d(y, A)$. On a donc prouvé que

$$d(x, A) - \|x - y\| \leqslant d(y, A) \iff d(x, A) - d(y, A) \leqslant \|x - y\|$$

Par symétrie, on peut mettre la valeur absolue au terme de gauche et on a démontré que $x \mapsto d(x, A)$ est 1-liptschitzienne. ♦

EXERCICE 8. *Montrer que la composée de deux applications lipschitziennes l'est encore.*
** Et leur produit? (applications de* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *par exemple).*

EXERCICE 9. *L'application* $x \mapsto x/(1 + \|x\|)^2$ *est-elle lipschitzienne? Quelle est son image?*

EXERCICE 10. *Montrer qu'une application lipschitzienne* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *vérifie une inégalité de la forme* $|f(x)| \leqslant A|x| + B$.

EXERCICE 11. *Expliciter* $M \mapsto d(M, \Delta)$ *quand* M *est un point du plan* (xOy) *et* Δ *est la droite d'équation* $ax + by + c = 0$ *(ou un plan de* $\mathbb{R}^3$ *d'équation* $ax + by + cz = d$*) qvec la distance euclidienne canonique.*

1.4 Normes sur plusieurs espaces vectoriels

1.4.1 Hérédité de la norme

Dans tout espace vectoriel, il existe des **sous**–espaces vectoriels. Nous nous préoccupons de les normer. Or il est clair que les axiomes d'une norme restent vrais sur une partie qui contient $\vec{0}$, plus précisément :

DÉFINITION ET PROPOSITION. *Soit* F *un sous-espace vectoriel de l'evn* E *; alors la restriction de la norme* $\|.\|$ *de* E *à* F *fait de ce dernier un evn. On dit que c'est la* ***norme induite****.*

La morale de cette définition est qu'il n'est nul besoin de chercher à construire une norme sur un sous-espace d'un evn : il y en a déjà une. Nous retrouverons cette notion dans le cas intéressant où le sous-espace a des propriétés supplémentaires (par exemple, être de dimension finie).

1.4.2 Norme produit

On rencontre assez souvent un espace produit : $E \times F = \{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\}$ qui est de façon naturelle un espace vectoriel comme on le sait. Il serait agréable que la propriété d'être un ev**n** « monte » aussi aux espaces produits. C'est à peine moins naturel :

DÉFINITION ET PROPOSITION. *La* ***norme produit*** *sur l'espace* $E \times F$ *est définie par*

$$\|(x, y)\| = \text{Sup}(\|x\|, \|y\|)$$

Plus généralement, pour un produit de n *espaces* $E_1 \dots E_n$ *on pose*

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \operatorname*{Sup}_{i=1\dots n} (\|x_1\|, \dots, \|x_n\|)$$

Évidemment, il faut vérifier que l'on a bien trouvé une norme.

EXERCICE 12. *Le faire (pour* $E \times F$*).*

Un exemple simple mais profond est celui de $\mathbb{K}^n = \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \dots \mathbb{K}$.

PROPOSITION. *Les applications coordonnées*

$$l_k : x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_k \in E_k$$

sont 1–lipschitziennes pour la norme produit.

Trivial, mais utile (on en reparlera dans la section sur la dimension finie).

2 Suites d'éléments d'un evn

La meilleure façon de mettre en application les outils des evn, et de sentir les concepts de l'analyse (proximité, limites, continuité ...) est de les appliquer aux suites. Il n'y a pas vraiment de rupture avec l'étude des suites numériques.

Notamment, une suite est un cas particulier d'application (de $\mathbb{N}$ dans E), que l'on convient simplement de noter $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ au lieu de **u**.

2.1 Convergence

2.1.1 Définitions

On donne deux définitions équivalentes :

DÉFINITION 10. *La suite* (u_n) *converge vers* ℓ *ssi* $\|u_n - \ell\|$ *est une suite réelle qui converge vers 0, ou si*

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists n_0 \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geqslant n_0 \quad \|u_n - \ell\| < \varepsilon$$

Si ce n'est pas le cas, on dit que la suite diverge.

Attention ! ce n'est pas si simple de montrer qu'une suite diverge. En bonne rigueur, il faut montrer qu'elle ne converge pas vers chacun des points de E...

REMARQUE 1. *On constate la ressemblance avec la définition de la continuité (cf. infra). Il importe de bien retenir qu'**il n'y a pas de** n **à droite de la flèche** : dans une notation comme $A \to B$, A est le terme général d'une suite (donc dépend d'un n), et vit dans $E^{\mathbb{N}}$; alors que B est une limite, qui est un simple élément de E. Écrire quelque chose comme " $u_{n-1} \to u_n$ " est une démonstration... d'incompétence. En revanche on a les relations usuelles de comparaison **entre suites** à l'infini :* $o, O, \sim$

Exemple : La convergence d'une série de fonctions (mettons continues de $[a, b] \to \mathbb{C}$) signifie :

— Pour la norme $\| \|_\infty$: la convergence uniforme.

— Pour la norme $\| \|_2$: la convergence en moyenne quadratique.

La suite des polynômes (X^n) converge vers le polynôme nul pour la norme $N : P \mapsto \int_0^1 |P|$, et diverge pour la norme $N' : P \mapsto \int_1^2 |P|$.

EXERCICE 13. *Pourquoi la divergence, au fait ?*

Une suite stationnaire (constante à partir d'un certain rang) est convergente. La réciproque est fausse : la limite d'une suite convergente n'est pas forcément atteinte. Ainsi la suite $(1/n)$ tend vers 0 sans jamais toucher cette valeur.

2.1.2 Modestes propositions

PROPOSITION. *Une suite a au plus une limite.*

PROPOSITION. *Une suite convergente est bornée (réciproque fausse !!!).*

PROPOSITION. *Le sous-ensemble des suites convergentes est un sev de $E^{\mathbb{N}}$, et l'application $u \mapsto \lim u_n$ est linéaire.*

La dernière proposition signifie que la somme de deux suites convergentes converge vers la somme des limites (idem pour le produit d'ailleurs quand cela a un sens : produit scalaire, produit de matrices...).
Tout cela se démontre exactement comme dans le cas numérique.

2.2 Suites et normes

2.2.1 Comparer deux normes

On a vu qu'il est possible d'avoir des suites qui convergent pour une norme, mais pas pour une autre. On s'en doute, la convergence pour l'une est parfois en rapport, parfois sans rapport avec la convergence pour l'autre. Plus précisément :

THÉORÈME 2. *Pour que toute suite convergeant vers 0 pour la norme N converge aussi (vers 0) pour la norme N', il faut, et il suffit, qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $N' \leqslant \alpha N$.*

DÉFINITION 11. *Si cela est vrai dans les deux sens, c'est à dire que*

$$\exists\, 0 < \alpha < \beta \qquad \alpha N \leqslant N' \leqslant \beta N$$

on dit que les deux normes sont équivalentes.

Pour deux normes équivalentes, les notions essentielles, comme celle de convergence, coïncident : on peut remplacer l'une par l'autre sans changer aucun résultat *qualitatif.*
Démontrons le théorème :

Démonstration.

— Si $N' \leqslant \alpha N$ et $N(u_n) \to 0$ alors clairement $N'(u_n) \to 0$.

— Pour la réciproque, montrons la contraposée : supposons que pour tout $\alpha > 0$ il existe un $x \in E$ tel que $N'(x) > \alpha N(x)$. En prenant $\alpha = n$ et en notant x_n un vecteur associé à cette valeur, on construit une suite (x_n) telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad N'(x_n) > nN(x_n)$$

Posons enfin pour $n > 0$

$$u_n = \frac{x_n}{\sqrt{n} N(x_n)} \text{ : alors } N(u_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0 \text{ tandis que } N'(u_n) \geqslant \sqrt{n}$$

♦

EXERCICE 14. *Comparer les normes 1, 2, et ∞ sur $\mathbb{R}^n$.*

EXERCICE 15. *Comparer les normes 1 et ∞ sur l'espace des applications continues de* $[0, 1]$ *dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *(ça marche dans un sens, pas dans l'autre).*
Comparer aussi avec la norme 2 en utilisant l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ *:*

$$\left(\int fg\right)^2 \leqslant \int |f|^2 \times \int |g|^2.$$

2.2.2 Suites et espaces vectoriels

Il y a deux sens, du plus grand vers le plus petit et l'inverse.

THÉORÈME 3. *Soit* F *un sev de l'evn* E*, muni de la norme induite.*
Si (u_n) *converge dans* F *pour la norme de* E*, alors elle converge dans* E *vers la même limite.*
En revanche, si (u_n) *est une suite d'éléments de* F *qui converge dans* E*, elle ne convergera dans* F *que si sa limite s'y trouve.*

Trivial. Il faut faire attention au deuxième sens :
la suite de terme général $(1 + x/n)^n$ converge (vers $x \mapsto e^x$) dans l'espace des fonctions continues de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{C}$, muni de la norme sup (entre autres). Mais elle ne converge pas dans le sous-espace des polynômes, pour quelque norme que ce soit.

THÉORÈME 4. *Soit* $E = F \times G$ *un espace produit d'evn, muni de la norme produit. Alors une suite de* E *converge ssi les suites de ses composantes convergent :*

$$u_n = (v_n, w_n) \to \ell = (a, b) \iff v_n \to a \text{ et } w_n \to b$$

Démonstration facile : $\text{Max}(\|v_n - a\|, \|w_n - b\|) \to 0 \iff \|v_n - a\|$ et $\|w_n - b\|) \to 0$. Ceci se généralise à un produit d'un nombre quelconque (fini) d'evn. En particulier à $\mathbb{K}^n$, ce qui donne

COROLLAIRE 1. *Dans* $\mathbb{K}^n$*, une suite converge (avec la norme sup) ssi les suites des coordonnées convergent.*

Très important en pratique. On connaissait déjà le cas des suites complexes, qui convergent si et seulement si les parties réelles et imaginaires convergent chacune de leur côté.

2.3 Des suites dans des suites

2.3.1 Suites extraites

DÉFINITION 12. *On appelle* suite extraite *de la suite* $(u_n)_n$ *une suite de la forme* $(u_{n_p})_p$ *où* $(n_p)_p$ *est une suite d'entiers strictement croissante.*

Typiquement, on a les exemples des sous-suites paires et impaires (u_{2p}) et (u_{2p+1}). De même, les suites décalées (u_{n+1}) ou (u_{n+12}) sont des suites extraites.
Les suites extraites (aussi appelées sous–suites) partagent les propriétés de leur ancêtre : toute sous-suite d'une suite bornée (resp. convergente) est bornée (resp. convergente). . .

EXERCICE 16. *Les suites* (u_{2p}) *et* (u_{2p+1}) *convergent vers une* **même** *limite* ℓ*, montrer que* (u_n) *converge.*
Que dire d'une suite extraite d'une suite extraite ?

2.3.2 Valeurs d'adhérence

DÉFINITION 13. *ℓ est une **valeur d'adhérence** de la suite (u_n) ssi il existe une suite extraite (u_{n_p}) qui tend vers ℓ.*

EXERCICE 17. *Programmer et étudier expérimentalement le nombre de valeurs d'adhérence de la suite de* FAIGENBAUM *définie par*

$$u_{n+1} = 1 - \lambda u_n^2 \qquad u_0 \in [0, 1]$$

en faisant varier (délicatement) la valeur de λ entre 0 et 2.

Le nom de valeur d'adhérence peut s'interpréter ainsi : la suite ne peut s'empêcher de revenir tout près de cette valeur, même si elle s'en écarte parfois (voire une infinité de fois).
Il ne faut pas croire que le nombre de valeurs d'adhérence d'une suite soit limité : une suite aussi simple que $u_n = \sin(n)$ admet tous les points de $[-1, 1]$ comme valeurs d'adhérence, comme on le démontrera ultérieurement en exercice.
Cette notion nous servira surtout à établir la *divergence* d'une suite. Il est clair, intuitivement, qu'une suite convergente ne peut guère se permettre de s'éparpiller entre plusieurs valeurs d'adhérence.

PROPOSITION. *Toute suite convergente possède une seule valeur d'adhérence : sa limite.*

Trivial.

COROLLAIRE 2. *Une suite qui possède au moins deux valeurs d'adhérence distinctes est divergente.*

C'est surtout ce corollaire que l'on utilisera. Comme toujours il faut faire attention de ne pas prendre cette condition suffisante pour une condition nécessaire (mais voir néanmoins infra la section sur la compacité et la dimension finie) :

Exemple *:* La suite $u_n = n\big(1 + (-1)^n\big)$ n'a qu'une valeur d'adhérence (réelle) : 0, mais elle diverge.
En prenant sur $\mathbb{K}[X]$ la norme $\|a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n\| = \operatorname{Sup} |a_i|$, la suite (bornée !) des (X^n) — la base canonique — n'a pas de valeur d'adhérence.

EXERCICE 18. *Le démontrer.*
Indication : une (sous-)suite qui converge doit vérifier $\|u_{n_{p+1}} - u_{n_p}\| \to 0$.

EXERCICE 19. *Un sup (ou un inf) est une limite de suite.*
Plus précisément : montrer que si $\alpha = \operatorname{Sup}(X)$ où $X \subset \mathbb{R}$ mais $\alpha \notin X$, alors il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to \alpha$.

2.4 Séries dans un evn

En fait presque tout se passe comme dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) : les définitions d'une série, de sa convergence, de la somme, du reste, sont identiques. Les propriétés de linéarité subsistent *verbatim*. Quelques notions particulières à des dimensions > 1 :

2.4.1 Convergence dans une base

Supposons que E soit un evn de dimension finie, muni d'une base $(e_1 \ldots e_d)$. Alors toute suite (u_n) s'exprime (se projette) dans cette base par d suites de coordonnées : $(u_{n\ p})_{n\in\mathbb{N}}$ où

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_{n\ 1} e_1 + \ldots u_{n\ d} e_d$$

Les d suites $(u_{n\ p})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites numériques, et on peut considérer leurs sommes partielles $(s_{n\ p})_{n\in\mathbb{N}}$. Comme on a

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = s_{n\ 1}.e_1 + \ldots + s_{n\ d}.e_d$$

(avec $s_{n\ 1} = u_{0\ 1} + \ldots u_{n\ 1}$, etc) et qu'on a vu que la convergence dans un evn de dimension finie équivaut à la convergence des coordonnées, on en déduit

THÉORÈME 5. *Une série à valeurs dans* E, *evn de dimension finie, converge si et seulement si les séries des composantes convergent.*

En résumé, la convergence des séries **en dimension finie** n'est pas substantiellement différente du cas numérique. En particulier, les séries à termes complexes se traitent comme les séries à termes réels ($\mathbb{C}$ étant un $\mathbb{R}$-ev !).

3 Topologie des evn

3.1 Ouverts, fermés

Notre motivation est d'exprimer rigoureusement la notion de « infiniment près ». Pour cela, l'idée est de parler de propriétés vraies « dans tout voisinage » d'un point a, c'est à dire concrètement dans toute boule de centre a[3]. Commençons par cette notion intjuitive et formalisons la :

Voisinages

On dit qu'une partie V est un voisinage de a si, et seulement si, V contient une boule $B(a,r)$ ($r > 0$ bien sûr) : $\exists r > 0, B(a,r) \subset V$. a possède donc un "airbag" qui le protège douillettement, dans V.

REMARQUE 2. *Pour exprimer « infiniment proche », on parlera de propriétés vraies « dans tout voisinage ». Noter que l'intersection (ou la réunion) de deux voisinages d'un point en est un voisinage.*
Aussi, les voisinages sont les mêmes pour deux normes équivalentes.

3.1.1 Ouverts

On « ouvre » la notion de voisinage :

DÉFINITION 14. *Un ouvert est une partie qui est voisinage de chacun de ses points.*

PROPOSITION DE CARACTÉRISATION DES OUVERTS.

$$V \subset E \textit{ est un ouvert} \iff \forall a \in V \quad \exists r > 0 \quad B(a,r) \subset V.$$

Propriétés immédiates :
- E et $\emptyset$ sont des ouverts.
- Une boule ouverte est un ouvert !
- Toute réunion (même infinie) d'ouverts est ouverte.
- L'intersection de deux boules ouvertes est un ouvert, et donc...
- L'intersection de deux (ou même d'un nombre **fini** d') ouverts est ouverte.

REMARQUE 3. *Ces propriétés constituent en Topologie Générale les* **axiomes** *qui définissent une famille d'ouverts, laquelle* ***définit*** *une Topologie.*

On retiendra qu'un ouvert « protège » tous ses points en les enclosant dans une petite bulle/un airbag.

DÉFINITION 15. a *est un point intérieur de* $A \iff A$ *est voisinage de* a *(i.e. contient une boule autour de* a*).*

On a donc un ouvert quand tous les points sont intérieurs.

EXERCICE 20. *Montrer que tout ouvert engendre (par combinaisons linéaires) l'espace entier.*

3.1.2 Fermés

DÉFINITION 16. *Un fermé est le complémentaire d'un ouvert.*

REMARQUE 4. *On doit se douter que cette définition négative n'est pas pratique ! Les fermés sont des ensembles souvent beaucoup plus bizarres que les ouverts : par exemple, dans $\mathbb{R}^n$ un fermé est toujours l'ensemble des zéros d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. Aussi les ensembles fractals (ensembles de* JULIA, CANTOR, MANDELBROT*...) sont des fermés.*

Propriétés élémentaires :
- E et $\emptyset$ sont des fermés.
- Toute intersection (même infinie) de fermés est fermée.
- La réunion de deux (ou même d'un nombre fini de) fermés est fermée.

3. La notion de voisinage s'étend à des espaces plus généraux que les evn.

Exemples :

— une boule fermée $B_f(a,r)$ est un fermé! [si $x \in$complémentaire, on a $\|x-a\| > r$ et $\exists 0 < \varepsilon < r - \|x-a\|\ldots$]

— tout point, toute partie finie, est fermé(e).

— une sphère $S = \{x \in E \mid d(x,a) = r\}$ est fermée.

— $\mathbb{Z}$ est fermé car son complémentaire est réunion d'intervalles ouverts.

— * une boule ouverte n'est pas. . . fermée! (considérer un point au bord, il est dans le complémentaire mais n'est pas intérieur à ce complémentaire).

EXERCICE 21. *Montrer qu'une boule ouverte (resp. fermée) est un ouvert (resp. un fermé).*

DÉFINITION 17. a *est un point adhérent à* $A \iff a = \lim a_n$ *où* $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$.

D'après le calcul des inf's par limites de suite, on a de manière équivalente

DÉFINITION 18. a *est un point adhérent à* $A \iff d(a,A) = 0$.

Pour les propriétés ci-dessus, on peut vérifier que les complémentaires sont ouverts, ou utiliser la (très conseillée) caractérisation séquentielle :

THÉORÈME 6. A *est fermé*

$\iff$ A *est stable par passage à la limite,*

$\iff$ *toute suite de* A *qui converge dans* E *converge dans* A,

$\iff$ *tout point adhérent à* A *est élément de* A,

$\iff$ $\big(d(x,A) = 0 \iff x \in A\big)$.

Démonstration. Montrons d'abord par contraposition que si A est fermé alors il est stable par passage à la limite. Supposons la non stabilité, i.e. qu'il existe une suite d'éléments de A qui converge hors de A, i.e. $a_n \to b \notin A$ avec $a_n \in A \forall n$. Si A était fermé, $b \in B = E \setminus A$ qui est un ouvert et donc $\exists B(b,\varepsilon) \subset B$. Mais ceci contredit la définition de la limite selon laquelle $a_n \in B(b,\varepsilon)$ pour n assez grand. On a démontré $\Rightarrow$ par contraposition.
Réciproquement supposons A non fermé, i.e. B non ouvert : il existe donc $b \in B$ qui ne soit pas un point intérieur, i.e. $\forall \varepsilon > 0$ la boule $B(b,\varepsilon)$ contient un élément de A. Ceci permet de construire une suite (a_n) d'éléments de A tels que $\|a_n - b\| \leqslant 1/n \; \forall n$, et donc la suite (a_n) a une limite hors de A, ce qui démontre $\Leftarrow$ par contraposition.
On a montré que A est fermé $\iff$ toute suite de A qui converge, converge dans A. Le reste est paraphrase, avec la définition d'un point adhérent. ♦

Exemple *:*

— $\mathbb{Z}$ est fermé car toute suite d'entiers convergente est stationnaire.

— $\mathbb{Q}$ n'est pas fermé (dans $\mathbb{R}$) car une limite de rationnels peut fort bien être irrationnelle.

— $[a,b]$ est fermé car les inégalités larges passent à la limite. De même on retrouve qu'une boule fermée est fermée.

— $A = [a,b[$ n'est pas fermé car la suite $(u_n = b - 1/n)$ est dans A (pour n assez grand. . .) et converge vers b qui est hors de A.

— L'ev des fonctions polynômes n'est pas fermé dans $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ muni de $\|\ \|_\infty$ car (par exemple) la fonction exp est limite de polynômes mais n'est pas un polynôme.

3.2 Intérieur, adhérence, frontière

DÉFINITION 19. *L'intérieur* $\mathring{A}$ *de* A *est la réunion des ouverts inclus dans* A *: c'est donc le plus grand ouvert contenu dans* A.

Cette définition fait sens parce que toute réunion d'ouverts reste un ouvert. On peut d'ailleurs visualiser l'intérieur de A comme la réunion des “airbags” des éléments intérieurs de A (cette propriété est donnée sans démonstration, pour faciliter l'intuition de cette notion).

PROPOSITION. $\overset{\circ}{A}$ *est l'ensemble des points intérieurs de* A *(rappel : ceux dont* A *est un voisinage). C'est aussi* $\bigcup B(a, \varepsilon_a)$ *où toutes ces boules sont contenues dans* A.

DÉFINITION 20. *L'adhérence* $\overline{A}$ *de* A *est l'intersection des fermés contenant* A *: c'est donc le plus petit fermé contenant* A.

PROPOSITION. $\overline{A}$ *est l'ensemble des points adhérents à* A *(rappel : les limites de suites d'éléments de* A*). C'est donc l'ensemble défini par l'équation* $d(x, A) = 0$.

Démonstration. D'après la caractérisation séquentielle, un fermé contenant A doit contenir les limites de suites (CV) de A. Donc $\overline{A}$ contient au moins $A \bigcup \{a' = \lim a_n \mid (a_n) \in A^{\mathbb{N}}\}$. Ce qui se réduit en fait à $\{a' = \lim a_n \mid (a_n) \in A^{\mathbb{N}}\}$ car tout point de A est limite d'une suite constante !
Reste à montrer que cet ensemble est fermé. Pour cela exceptionnellement on revient à la définition : soit B son complémentaire. C'est l'ensemble des $x \in E$ qui ne sont PAS limite d'une suite d'éléments de A. Par la caractérisation séquentielle de $d(x, A)$, on a $B = \{x \mid d(x, A) > 0\}$. Montrons que B est ouvert. Soit $x \in B$ et fixons $0 < \varepsilon < d(x, A)$. Prouvons que x est intérieur à B : soit $y \in B(x, \varepsilon)$, on sait que $d(x, A) - d(y, A) \leqslant \|y - x\|$ (l'application "distance à A" est lipschitzienne de rapport 1). Donc

$$d(y, A) \geqslant d(x, A) - \|y - x\| \geqslant d(x, A) - \varepsilon > 0 \Rightarrow y \in B$$

ce qui prouve que B est ouvert, i.e. A est fermé. ♦

À noter que $\overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A}$ et que A est ouvert $\iff A = \overset{\circ}{A}$, tandis que A est fermé $\iff A = \overline{A}$. Ne pas confondre la notation avec celle utilisée pour le complémentaire dans le contexte des probabilités !

DÉFINITION 21. *On dira que* A *est* **dense** *dans* E *ssi* $\overline{A} = E$ *; on dit que* A *est dense dans* B *ssi (c'est un peu plus compliqué)* $B \subset \overline{A}$.

Cela signifie que tout point de B est adhérent à A.
On sait par exemple que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, et aussi dans $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. Le théorème de WEIERSTRASS que les polynômes sont denses dans $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme. Pour finir, on a aussi la définition de la différence entre ces deux notions, puisque $\overset{\circ}{A} \subset \overline{A}$:

DÉFINITION 22. *La frontière de* A *est* $Fr(A) = \overline{A} \backslash \overset{\circ}{A} = \overline{A} \cap \overline{E \setminus A}$.

La frontière peut être vide, mais c'est toujours un fermé. La frontière de A est aussi la frontière de son complémentaire. Cette symétrie se voit mieux en écrivant :

$$E = \overline{A} \cup (E \setminus \overline{A}) = \left(\mathbf{Fr}(A) \cup \overset{\circ}{A}\right) \cup (E \setminus \overline{A}) = \overset{\circ}{A} \cup \mathbf{Fr}(A) \cup \overset{\circ}{\overline{E \setminus A}} :$$

E se partitionne en deux ouverts (les intérieurs de A et de son complémentaire) et la frontière (dessiner, dans le cas d'une boule).

EXERCICE 22.

- *Adhérence et intérieur respectent l'inclusion.*
- *Si* A *est un ouvert inclus dans* B, *alors* $A \subset \overset{\circ}{B}$.
- *Énoncer une propriété analogue pour l'adhérence.*
- *Calculer les adhérences, intérieurs, frontières, des boules ouvertes ou fermées.*
- *Toutes ces notions sont invariantes par changement de normes équivalentes.*

J'ai utilisé un petit

LEMME DE DUALITÉ. *L'intérieur du complémentaire est le complémentaire de l'adhérence. L'adhérence du complémentaire est le complémentaire de l'intérieur.*

Qui résulte des définitions ! Si ! Regardez cette phrase suffisamment longtemps jusqu'à ce qu'elle vous soit évidente (le numéro du SAMU est le 115).

Exemple : Soit A une partie convexe de E. Alors

PROPOSITION. *L'intérieur et l'adhérence de A sont encore convexes.*

Démonstration. L'adhérence est le plus facile : soient $x, y \in \overline{A}$. Alors il existe deux suites $(x_n), (y_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telles que $x_n \to x, y_n \to y$.
Soit $z \in [x, y]$, càd que $z = \lambda x + (1-\lambda)y$ pour un certain $\lambda \in [0, 1]$. Alors $z = \lim z_n$ où $z_n = \lambda x_n + (1-\lambda)y_n$, et par hypothèse ; comme $x_n, y_n \in A$ par convexité on a $z_n \in A$ et donc $z \in \overline{A}$, cqfd.

Soient maintenant $x, y \in \overset{\circ}{A}$ (supposé non vide sinon il n'y a rien... et rien à prouver !). On a donc pour le même prix deux boules $B(x, r)$ et $B(y, s)$ incluses dans A. Quitte à réduire l'un ou l'autre rayon, prenons $s = r$.

Soit $z = \lambda x + (1-\lambda)y$ comme ci- dessus, il faut montrer que $z \in \overset{\circ}{A}$ (s'appuyer dans ce qui suit sur la figure 1).
Je dis que $B(z, r) \subset A$. En effet, soit $t \in B(z, r)$, i.e. $\|t - z\| < r$. Alors

$$t = z + (t - z) = \lambda x + (1-\lambda)y + \big(\lambda(t - z) + (1-\lambda)(t - z)\big) = \lambda(x + (t - z)) + (1-\lambda)(y + (t - z))$$

et on a $x + (t - z) \in B(x, r)$ puisque $\|t - z\| < r$, donc $x + (t - z) \in A$; de même $y + (t - z) \in A$ et par convexité de $A, t \in A$, cqfd. ♦

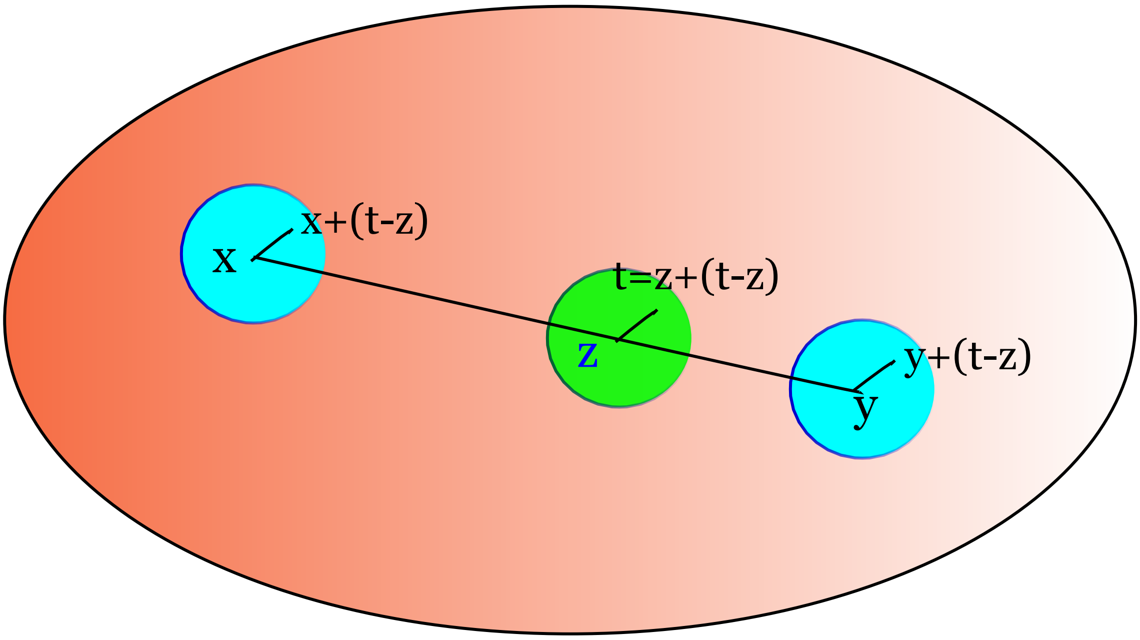

FIGURE 1 – Convexité de l'intérieur d'un convexe

3.2.1 Ouverts & fermés relatifs

Une notion difficile mais importante.
Considérons le cas particulier suivant : on a envie de regarder les boules dans un sous-espace F de E. Ce sont, de façon naturelle, les $\{x \in F \mid \|a - x\| < r\}$, c'est à dire les $B(a, r) \cap F$. Plus généralement,

DÉFINITION 23. *Un ouvert relatif à la partie A est l'intersection de A et d'un ouvert (de E). Idem pour les fermés.*

Ainsi, $[0, \varepsilon[$ est un voisinage de 0... mais dans $\mathbb{R}_+$.
Par hérédité, on a une caractérisation des fermés relatifs :

PROPOSITION. $F \subset A$ *est fermé* dans A (relativement à A) *ssi toute suite de* F *qui converge dans* A *converge dans* F.

REMARQUE 5. *La restriction de la norme de* E *à un sev* F *est une norme de* F *; il est heureux que les boules pour cette norme (et donc les ouverts) coïncident avec les boules* relatives.

Un exemple imagé : le lycée ARAGO recrute dans son voisinage, qui est limité par la mer et par l'Espagne. Un tel voisinage est donc (en gros) un quart de cercle.
Le lycée MASSÉNA à Nice recrute sur un demi-cercle, le lycée HENRI IV à Paris recrute sur un disque entier (de très grand rayon :-)).

4 Continuité

4.1 Définition

Rien de neuf sous le soleil des evn :

DÉFINITION 24. f *est continue en* $a \in A \iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \alpha > 0 \qquad (x \in A \textit{ et } \|x - a\| < \alpha) \Rightarrow \|f(x)$$

On peut mettre des inégalités larges partout, sauf pour $\varepsilon > 0$!

EXERCICE 23. *Que signifierait*

$$\forall \varepsilon \geqslant 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad (\|x - a\| < \alpha) \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| \leqslant \varepsilon \quad ?$$

Cette définition généralise celle de la continuité d'applications à valeurs numériques. Elle généralise aussi celle de limite en un point selon une partie, plus délicate et rare :

4.2 Convergence en un point

On considère $f : A \to F$ et un élément $a \in \overline{A}$ un point adhérent. Alors

DÉFINITION 25. f *converge en* a *ssi il existe un* $\ell \in F$ *tel que pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe un voisinage de* a *(dans* A*) dont l'image est incluse dans* $B(\ell, \varepsilon)$*, ou de façon équivalente :*

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \alpha > 0 \qquad (x \in A \cap B(a, \alpha)) \Rightarrow (f(x) \in B(\ell, \varepsilon))$$

ou encore :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \alpha > 0 \qquad (x \in A \textit{ et } \|x - a\| < \alpha) \Rightarrow \|f(x) - \ell\| < \varepsilon$$

L'unicité (comme pour les suites) de cette limite autorise, **quand elle existe**, à poser

$$\lim_{x \to a, x \in A} f(x) = \ell$$

Cela signifie (cf. la définition en termes de voisinages) que $f(x)$ est voisine de ℓ pour x voisin de a. Attention, la logique (?) de la chose est en sens inverse : la précision voulue sur $f(x)$ **impose** une précision sur x. L'arrivée conditionne le départ[4].
À noter que si f est définie en $a \in A$, alors la seule limite possible est $f(a)$! (pourquoi ?) dans ce cas, on retrouve la définition de la continuité.
Revenons maintenant au cas où f n'est pas définie en a : on voit maintenant que f converge en a ssi on peut **prolonger f en a par continuité**.
Autre point technique : l'application $(x, y) \mapsto \frac{2xy}{x^2+y^2}$ n'a guère de limite en l'origine. Néanmoins, comme on le voit facilement il y a des limites (différentes !) quand on tend vers l'origine selon une droite.

DÉFINITION DE LA LIMITE SELON UNE PARTIE. *Soit* $P \subset A$, $a \in \overline{P}$. *On dit que* f *admet une* ***limite en*** a ***selon*** P *ssi la restriction de* f *à* P *admet une limite en* a.

EXERCICE 24. *Étudier les éventuelles limites en l'origine* selon les droites passant par $(0, 0)$ *de* $(x, y) \mapsto \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$*, puis selon les paraboles* $y = kx^2$.
Idem avec $(x, y) \to x^y$ *(limites sur la frontière du domaine de définition ?)*

4. Comme pour un archer qui vise sa cible.

Ne pas se tourmenter à propos de cette définition...
Dernier point : on va étendre ces définitions à l'infini.
On considère $f : [a, +\infty[\to F$. Alors

DÉFINITION 27. f *converge en* $+\infty$ *ssi*

$$\exists \ell \in F \mid \forall \varepsilon > 0 \qquad \exists A > 0 \qquad (x > A) \Rightarrow d(f(x), \ell) < \varepsilon$$

Définition similaire pour la convergence en $-\infty$.
On peut même étendre au cas d'une application de E dans F, en convenant[5] que $x \to \infty$ quand $\|x\| \to +\infty$.
Enfin, qu'est-ce qu'une application qui tend *vers* l'infini ? Donnons la définition pour $-\infty$:

DÉFINITION 28. *Soit* $f : A \subset E \to \mathbb{R}$ *et* $a \in \overline{A}$. *On dit que* f *tend vers* $-\infty$ *en* a *ssi*

$$\forall M > 0 \quad \exists \alpha \qquad (x \in A \text{ et } \|x - a\| \leqslant \alpha) \Rightarrow (f(x) \leqslant -M)$$

EXERCICE 25. *Montrer que tout polynôme* $P \in \mathbb{C}[X]$ *de degré au moins 1 tend vers l'infini en l'infini (dans* $\mathbb{C}$*).*

4.3 Image continue d'une suite

Commençons par le plus simple :

THÉORÈME 7. *Si* (u_n) *converge vers la limite* ℓ *et si* f*, définie en tout point de la suite, est continue en* ℓ*, alors*

$$\lim f(u_n) = f(\lim u_n) = f(\ell)$$

On peut se contenter que f admette une limite en ℓ (cf. limite selon une partie).

Démonstration. Donnons une preuve à l'ancienne, à charge pour le lecteur de la réécrire avec des ε :
Pour rendre $f(u_n)$ proche de $f(\ell)$, il suffit, d'après la continuité de f, de rendre u_n proche de ℓ. Mais d'après l'autre hypothèse (la convergence de (u_n)) cela sera réalisé pour n assez grand. ♦

COROLLAIRE 3. *Si une suite récurrente vérifiant* $u_{n+1} = f(u_n)$ *converge vers* ℓ*, et si* f *est continue en* ℓ*, alors* $f(\ell) = \ell$.

Ceci n'est **pas** « le » théorème du point fixe[6] ! seulement que les limites éventuelles d'une suite récurrente sont des points fixes de l'application associée.
On a un aimable critère de convergence, dit « critère séquentiel » :

THÉORÈME 8. f *converge en* a *selon* A *ssi pour toute suite* (u_n) *de* A *convergeant vers* a*, on a* $(f(u_n))$ *qui converge.*

Propriété remarquable : on n'exige même pas que toutes ces suites convergent vers la même valeur ! C'est ce qu'on s'empresse de démontrer dès le début...

Démonstration. Si $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ convergent toutes deux, avec $u_n \to a$ et $v_n \to a$, alors la suite définie par $w_{2n} = u_n, w_{2n+1} = v_n$ converge aussi vers a, et donc $f(w_n)$ converge... à la fois vers les limites de $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$, qui en sont des sous-suites, qui ont donc même limite.
Par ailleurs, si tout cela est vrai, montrons que cela exige la convergence de f vers la limite commune ℓ de ces suites $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$; supposons un peu que f ne tende pas vers ℓ en a : alors il existe un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\alpha > 0$ — par exemple pour $\alpha = 1/n$ — on aurait des $x_n \in A \cap B(a, \varepsilon)$ tels que $\|f(x_n) - \ell\| \geqslant \varepsilon$. Contradiction flagrante, car $x_n \to a$ par construction. La réciproque vient du théorème 7. ♦

5. Il y a d'autres façons de mettre de l'infini sur un evn...
6. Il y en a beaucoup, ils expriment une condition suffisante pour qu'une application possède un point fixe — et un seul.

On a le corollaire : f est continue en a ssi pour toute suite (u_n) tendant vers a, on a $f(u_n)$ qui tend vers $f(a)$ (≪ qui converge ≫ suffit !).

4.3.1 Composée d'applications continues

Le même critère des suites permet de démontrer le fameux théorème :

PROPOSITION. *La composée de deux applications continues est continue.*

D'ailleurs, une suite est un cas particulier d'application. La parenté est plus visible si l'on écrit

$$\lim f \circ g = f(\lim g) = \lim_{t \to \lim g} f(t)$$

qui est une écriture équivalente, mais plus générale, de la Proposition ci-dessus.
On peut aussi *décomposer* une application continue, quand celle-ci arrive dans un espace produit.
On l'a vu pour les suites, d'après le théorème 8 c'est pareil pour les applications :

PROPOSITION. *Soit f une application de A dans $E \times F$ et a adhérent à A, alors f converge en a ssi ses deux composantes convergent :*

$$\lim(f_1, f_2) = (\lim f_1, \lim f_2)$$

De même pour un produit fini d'espaces vectoriels normés.
En particulier, une application à valeurs dans $\mathbb{K}^n$ est continue ssi toutes ses composantes le sont.
Cela rappelle la propriété similaire pour les suites... Nous en reparlerons.

4.4 Fonctions et topologie

4.4.1 Continuité et parties de E

On a une caractérisation de la continuité qui paraît mystérieuse à moult taupins, car elle fait appel à l'image inverse,

$$f^{-1}(U) = \{x \in D_f \mid f(x) \in U\}$$

Le mystère tient à ce que f^{-1} n'existe pas ! en tout cas, ce n'est certainement pas une application de F (ou plutôt de $f(A)$) dans E [7].

THÉORÈME 9. *Si f est continue de A dans F alors l'image* inverse *par f d'un ouvert (resp. fermé) de F est un ouvert (resp. fermé) de A.*
En particulier, si f est continue de A dans $\mathbb{R}$, alors les ensembles $\{f \leqslant m\}$ et $\{f = m\}$ sont fermés, et $\{f < m\}$ est ouvert.

Démonstration : toutes les caractérisations de la continuité peuvent être utilisées, au choix !

REMARQUE 6. *La réciproque est valide : si cela est vrai pour TOUT ouvert (resp. fermé), alors f est continue.*
En effet, l'image ***inverse*** *de $B(f(a), \varepsilon)$, qui est un ouvert contenant a, contient donc une boule $B(a, \alpha)$, ce qui paraphrase la définition même de la continuité.*

Exemple *:*

- le groupe des matrices inversibles est ouvert ($\det \in \mathbb{K}^*$), le groupe spécial linéaire (déterminant = 1) est fermé car Det est continue.
- Une hyperbole comme $y = 1/x$ est fermée : image inverse de $\{1\}$ par $(x, y) \mapsto x \times y$. notez que l'image **directe** de ce fermé par l'application continue $(x, y) \mapsto x$ est un ouvert !
- Ceci se généralise au graphe d'une appli continue (annule $y - f(x)$).
- $\mathbb{Z}$ est fermé (dernière dem !) car ensemble des zéros de $x \mapsto sin(\pi x)$.

4.5 Opérations sur les limites

Considérons des fonctions f, g, φ de A dans F, F et $\mathbb{K}$ respectivement. Alors si ces trois fonctions convergent en $a \in \overline{A}$, il en est de même de $f + \lambda g, \varphi f$ et, sous la forme la plus générale :

$$\lim(f + \varphi g) = \lim f + \lim \varphi \lim g$$

7. C'est bien une application, mais de $\mathcal{P}(F)$ dans $\mathcal{P}(A)$ i.e. elle envoie une partie de F sur une partie de A.

Donc $\mathcal{C}^0(A, F)$ est un ev, et même une algèbre si $F = \mathbb{K}$.
On a aussi la continuité des applications $\|f\|$ (composée) et, si φ tend vers une limite numérique non nulle, de $1/\varphi$, ainsi donc que d'applications comme $f/\|f\|$ là où f ne s'annule pas...

EXERCICE 26. *Montrer que pour* $f \in \mathcal{C}^0(E, \mathbb{R})$ *et* $0 \leqslant \alpha < 1$, *on peut définir une application continue par* $g = \dfrac{f}{|f|^\alpha}$ *et* $g = 0$ *quand* $f = 0$.

4.6 Applications linéaires continues

Les applications linéaires sont bien plus simples que les autres. Les liens privilégiés entre norme et structure d'espace vectoriel permettent d'espérer une simplification des critères de continuité, pour les applications linéaires.
Remarquons déjà que la continuité en un point quelconque a équivaut à la continuité en $\vec{0}$, puisque $f(x) - f(a) = f(x - a)$ quand f est linéaire.

4.6.1 Caractérisation des applications linéaires continues

THÉORÈME 10. *L'application* $f \in \mathcal{L}(E; F)$ *est continue ssi*

$$\exists M > 0 \ \forall x \in E \quad \|f(x)\| \leqslant M.\|x\|. \qquad (\mathcal{C})$$

En résumé, la continuité, pour une application notoirement linéaire, se résume à "la lipschitzianéité en 0". Attention, M est indépendant de x !

Démonstration. L'inégalité $(\mathcal{C})$ prouve que f est lipschitzienne et donc continue :

$$\|f(x) - f(a)\| = \|f(x - a)\| \leqslant M.\|x - a\| \to 0 \text{ quand } x \to a$$

Réciproquement, supposons f continue. En particulier f est continue en 0 :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \alpha > 0 \ (\|x\| \leqslant \alpha) \Rightarrow (\|f(x)\| \leqslant \varepsilon)$$

Soit alors $y \neq 0$ et posons $M = \dfrac{\varepsilon}{\alpha}$. Il vient

$$\|f(y)\| = \|f\left(\frac{\|y\|}{\alpha}\alpha\frac{y}{\|y\|}\right)\| = \|\frac{\|y\|}{\alpha}f(x)\| = \frac{\|y\|}{\alpha}\|f(x)\| \leqslant \frac{\|y\|}{\alpha} \times \varepsilon = M\|y\|$$

puisque $x = \alpha\dfrac{y}{\|y\|}$ est de norme [inférieure ou] égale à α. ♦

Exemple : considérons l'application $P \mapsto P(1)$ sur $E = \mathbb{C}[x]$. C'est une forme linéaire. Quand on munit E de la norme $\| \ \|_\infty = \text{Sup}\,[0, 1]$, elle est clairement continue (et 1–lipschitzienne).
Mais pour la norme $P \mapsto \|P\|_1 = \int_0^1 |P|$, elle n' est PAS continue : en effet, la suite $(n+1)X^n$ est bornée pour cette norme, mais ses valeurs en 1 ne le sont pas : l'application n'est donc pas lipschitzienne, donc pas continue. Comme on le voit, *la continuité d'une application dépend de la norme choisie.* On s'en doute, elle reste la même avec des normes équivalentes.

4.6.2 Cas des applications bilinéaires

Mutatis mutandis, tout se passe comme pour les applications linéaires.

THÉORÈME 11. *L'application bilinéaire* B *de* $E \times F$ *dans* G *est continue ssi il existe une constante* M *telle que*

$$\forall (x, y) \in E \times F \qquad \|B(x, y)\| \leqslant M.\|x\|.\|y\|$$

EXERCICE 27. *Montrer au moins l'implication* $\Leftarrow$.

Ceci se généralise sans douleur aux applications tri-, multi-linéaires.
De façon générale, tous les « produits » que nous rencontrons en mathématiques seront continus :

COROLLAIRE 4. *Les applications suivantes sont continues :*

- *Le produit externe* $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \to \lambda.x$.
- *Le produit interne* $(u, v) \to u.v$ *dans une algèbre normée.* [8]
- *Le produit scalaire dans un espace préhilbertien (via* CAUCHY-SCHWARZ*).*

Exemple : Anticipant sur le fait qu'en dimension finie, linéaire $\Rightarrow$ continu, par multilinéarité du déterminant par rapport à ses colonnes, on a (pour toute norme sur $\mathbb{R}^n$)

$$\exists k > 0, \forall C_1, \dots C_n \in \mathbb{R}^n,\ |\mathrm{Det}(C_1, C_2 \dots C_n)| \leqslant k\|C_1\|. \dots \|C_n\|$$

En particulier pour la norme 2 on a le fait remarquable que $k = 1$: c'est la fameuse (et délicate) inégalité de Hadamard.

5 La compacité

5.1 Parties compactes

Commençons par les propriétés vraies dans tout evn.

5.1.1 Définition séquentielle

DÉFINITION 29. *Un compact est une partie* K *de* E *telle que toute suite de* K *admette une sous-suite convergente* dans K.

Par exemple, toute partie finie est compacte, d'après le principe des chaussettes (pigeon-holes, ou tiroirs).

5.1.2 Compacts et fermés

PROPOSITION. *Tout compact est fermé et borné.*

La réciproque est fausse en dimension infinie : considérer les suites $\varepsilon_k = (0, 0, 0, \dots 0, 1, 0, 0, \dots)$ dans ℓ^∞. Elle forment une suite de la sphère unité fermée, qui n'a pas de sous-suite convergente.

Démonstration. Fermé, par définition, puisque la limite de toute sous-suite d'une suite convergente (qui n'est autre que la limite de la suite) doit être dans le compact.
Borné, car sinon on peut construire par récurrence une suite (u_n) dans la partie telle que

$$n \neq m \Rightarrow d(u_n, u_m) \geqslant 1$$

D'une telle suite, même Einstein ne saurait extraire une sous-suite convergente. ♦

PROPOSITION. *Tout fermé d'un compact est compact, et réciproquement tout partie compacte d'un compact y est fermée..*

On le voit en considérant les suites dans cette partie.
Autrement dit, on obtient les compacts inclus dans K en *coupant* K par des fermés.

PROPOSITION. *Le produit de deux compacts est compact.*

Bien entendu, cela signifie « un compact de l'espace produit muni de la norme produit ». Exemple : un rectangle $[a, b] \times [c, d]$ dans $\mathbb{R}^2$. La démonstration qui suit est simple, mais à connaître parfaitement.

Démonstration. Soient A et B deux compacts de E et F respectivement. On considère une suite (a_n, b_n) dans $A \times B \subset E \times F$.
Extrayons une sous-suite convergente de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, soit $(a_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$. Il ne sert de rien de faire de même séparément pour l'autre membre, car les deux sous-suites d'indices peuvent n'avoir rien de commun. En revanche, observons que $(b_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite dans le compact B : on peut en extraire $(b_{n_{p_q}})_{q\in\mathbb{N}}$, convergente. Joie ! La sous–sous–suite $(a_{n_{p_q}})_{q\in\mathbb{N}}$, qui est une sous–suite d'une sous–suite convergente, est elle aussi convergente. Donc

$$(a_{n_{p_q}}, b_{n_{p_q}})_{q\in\mathbb{N}} \qquad \text{est une sous–(sous–!!)suite convergente de } (a_n, b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$ ♦

EXERCICE 28. *Le produit de deux fermés est-il un fermé ?*

REMARQUE 7. *Par une récurrence immédiate, le produit de* n *compacts est encore compact. En fait (théorème de* TYCHONOFF*) cela reste vrai pour un produit quelconque, le problème étant de savoir quelle topologie mettre sur un produit d'une infinité d'espaces (métriques).*

5.2 Compacité et autres propriétés

5.2.1 Compacité et conitnuité

THÉORÈME 12. *L'image continue d'un compact est compacte : si K est compact dans E et f est continue de E dans F alors $f(K)$ est compact dans F .*

La démonstration est immédiate, avec les suites par exemple :

Démonstration. Dans ces hypothèses, soit $(f(u_n))_n$ une suite de $f(K)$. Alors la suite $(u_n)_n$ de K admet une sous-suite CV $(u_{n_p})_p$, par continuité son image $(f(u_{n_p}))_p$ est une SSCV de $(f(u_n))_n$ (et la limite reste dans $f(K)$). ♦

REMARQUE 8. • *Ce n'est* pas du tout *une caractérisation de la continuité. Considérer la fonction caractéristique $\chi_{\mathbb{Q}}$!*
• *Ne pas confondre avec les images* **inverses** *(de fermés/ouverts). Faire l'exercice d'application suivant.*

EXERCICE 29. *(Centrale 2018)*
Soit K l'ensemble des matrices 2×2 dont les valeurs propres sont de module 1.
À toute matrice M on associe le couple $(\text{Tr}\, M, \text{Det}\, M)$. On rappelle/prévient que Tr M est la somme des deux valeurs propres et $\text{Det} M$ est leur produit.
En déduire que $f(K)$ est compact.
Montrer que $K = f^{-1}(f(K))$. En déduire que K est fermé.

En particulier, l'image continue d'un compact est toujours bornée, et on a le corollaire essentiel :

COROLLAIRE 5. *Une application continue d'un compact dans $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.*

Ceci montre l'existence de tout un tas de maxima et minima de fonctions, sous la seule condition qu'elles soient continues sur une partie compacte adéquate. Un exemple moins trivial : le problème de FERMAT (cf. exos). Une généralisation parfois utile : pour une application continue de A compact dans E, il existe $a \in A$ tel que $\forall x \in A\ \|f(x)\| \leqslant \|f(a)\|$ (idem avec $\geqslant$ bien sûr)

THÉORÈME DE HEINE.
Toute application continue sur un compact K y est ***uniformément*** *continue, c'est à dire que*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x, y \in K \qquad \|x - y\| \leqslant \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leqslant \varepsilon$$

(propriété plus forte que la continuité ordinaire)

Démonstration. Par l'absurde. Considérons une application continue sur le compact K, qui ne soit pas uniformément continue : d'après la définition de cette notion, cela signifie

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \alpha > 0 \quad \exists x_\alpha, y_\alpha \qquad \|x_\alpha - y_\alpha\| \leqslant \alpha \text{ mais } \|f(x_\alpha) - f(y_\alpha)\| \geqslant \varepsilon$$

Cela n'a rien d'indécent : pour l'application $x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans lui-même, on peut avoir $|x^2 - y^2| \geqslant 1$ pour x et y très proches, e.g. $x = y + 1/y$, à condition qu'ils soient proches de l'infini.

Choisissons α de la forme $1/n$: alors on définit ainsi deux suites $(x_n), (y_n)$ telles que $\|x_n - y_n\| \leqslant 1/n$ et $\|f(x_n) - f(y_n)\| \geqslant 1$.

Le bât blesse quand on se souvient que l'on peut extraire une suite convergente de (x_n, y_n) qui se déplace dans le compact $K \times K$. On aura donc

$$x_{n_p} \to x \quad y_{n_p} \to y \quad \text{ et } \quad x_{n_p} - y_{n_p} \to 0 \quad \text{d'où} \quad x = y$$

Mais par continuité on devrait avoir

$$f(x_{n_p}) \to f(x) = f(y) = \lim f(y_{n_p})$$

alors que $\forall p \quad \|f(x_{n_p}) - f(y_{n_p})\| \geqslant 1$: contradiction. ♦

Ce théorème sert surtout à prouver d'autres théorèmes (cf. l'approximation d'une fonction continue par une fonction en escalier, qui donne la méthode des rectangles).

5.2.2 Compact et convergence

THÉORÈME 14. *Une suite à valeurs dans un compact est convergente* $\iff$ *elle possède une* unique *valeur d'adhérence.*

NB : par définition de la compacité toute suite en possède au moins une. Par ailleurs toute suite convergente a une unique v.a., sa limite. Il reste donc seulement à démontrer qu'une suite divergente, à valeurs dans un compact K, possède au moins deux v.a. distinctes.

Démonstration. Soit donc une suite (u_n) divergente à valeurs dans le compact K : de ce fait

1. il existe une valeur d'adhérence $a \in K$, et donc une sous-suite convergeant vers a.
2. Mais $(u_n) \not\to a$, donc par définition de la convergence

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall N \ \exists n > N \ \|u_n - a\| \geqslant \varepsilon \qquad (\sharp)$$

Ceci signifie que si l'on numérote les éléments de la suite "éloignés de a" au sens de l'inégalité précédente : $u_{n_0}, u_{n_1}, \dots u_{n_p}, \dots$, leur séquence est infinie (sinon il existerait un $\operatorname{Max} n_p$). Or $p \mapsto u_{n_p}$ est une sous-suite de (u_n), donc une suite dans K. Elle possède de ce fait une v.a. b : il existe une sous-sous-suite (!) $u_{n_{p_q}} \to b$.
Par passage à la limite dans $(\sharp)$ il vient $\|b-a\| \geqslant \varepsilon$. Or b est aussi une v.a. de (u_n) : on a bien exhibé deux v.a. distinctes de la suite. ♦

NB : pour une suite qui n'est pas dans un compact c'est FAUX. Même dans $\mathbb{R}$, la suite $\big(n\big((-1)^n+1\big)\big)_n$ a la seule v.a. 0 bien que divergente. Plus sophistiqué, la suite bornée des applications $\varepsilon_n : t \mapsto e^{nit}$ (pour la norme $\| \ \|_\infty = \operatorname{Sup}_{[0,2\pi]}$ par exemple) n'a aucune v.a. du tout...

5.3 Compacts en dimension finie

Commençons par un exemple, dans un espace de dimension n rapporté à une base : la boule unité (en fait, l'hypercube) pour la norme sup est $B = \{x \in E \mid \forall i = 1 \dots n \ |x_i| \leqslant 1\}$ où les (x_i) sont les coordonnées de x.
Sous cette forme, on voit bien que $B = [-1,1]^n$ est le produit de n segments $[-1,1]$, qui sont compacts [9], donc B est compacte.
Le critère des fermés d'un compact permet d'en déduire que la sphère unité elle aussi est compacte.
Ceci va se généraliser ci-dessous en un théorème immensément gratifiant :

THÉORÈME 15. *En dimension finie, tout fermé borné est compact.*

C'est la réciproque de la Proposition 5.1.2. C'est aussi une forme du théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS, et on le démontrera *infra*. Attention que dans $\mathbb{K}[X]$, par exemple [10], la boule unité n'est pas compacte. En fait (Thm de RIESZ, h.p.) le théorème 15 caractérise la dimension finie.

6 Le cas de la dimension finie

En dimension finie, bon nombre des notions étudiées précédemment se simplifient : le tout premier théorème énoncé affirme l'équivalence de **toutes** les normes. En conséquence, pratiquement toutes les notions topologiques seront valables pour n'importe quelle norme, sans qu'il soit nécessaire de la préciser.
Il en résulte aussi entre autres choses une simplification de la notion de compacité, et la continuité de toute application linéaire.

9. Démontré en Sup, par dichotomie.
10. Norme au choix.

6.1 Équivalence des normes

C'est LA propriété fondamentale.

THÉORÈME 16. *En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

La démonstration est purement technique (non exigible !).

Démonstration. On va prendre une base et comparer une norme quelconque N à la norme

$$x = (x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \mapsto \operatorname*{Sup}_{i=1\dots n} |x_i|$$

Dans un sens :

$$N(x) = N(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} N(x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.N(e_i) \leqslant \|x\|. \sum_{i=1}^{n} N(e_i) = M.\|x\|$$

Dans l'autre, il nous manque une expression explicite de la norme N ! On va user (et ruser) d'arguments de compacité.

L'application N, de $(E, \| \|)$ dans $\mathbb{R}$, est donc continue (et même lipschitzienne de rapport M). La sphère unité pour $\| \|$ étant compacte, N y atteint un minimum m, strictement positif puisque atteint en un vecteur non nul.

On a donc pour $\|x\| = 1$, $m \leqslant N(x)$. On en déduit aisément

$$\forall x \in E \qquad m.\|x\| \leqslant N(x) \leqslant M.\|x\|$$

C'est ce que l'on voulait démontrer. ♦

EXERCICE 30. *Trouver la meilleure constante possible pour comparer, dans tous les sens possibles, les normes canoniques sur* $\mathbb{K}^n$ *:*

$$\|x\|_1 = \sum |x_i| \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum |x_i|^2} \qquad \|x\|_\infty = \operatorname{Sup} |x_i|$$

En conséquence, il n'est pas nécessaire de spécifier la norme pour parler de topologie d'un evn de dimension finie ! Les notions de parties : ouvertes, fermées, bornées, compactes, d'intérieur, d'adhérence ou frontière, la convergence des suites, leurs valeurs d'adhérence, la continuité des fonctions... *ne dépendent pas de la norme choisie.*

6.2 Applications linéaires en dimension finie

PROPOSITION. *Toute application linéaire d'un evn de dimension finie dans un autre est continue.*

REMARQUE 9. *On peut toujours supposer que l'espace d'arrivée est de dimension finie, car l'image d'une application linéaire est de dimension inférieure ou égale à celle de l'espace de départ (théorème du rang). Mais il peut aussi demeurer de dimension infinie, l'important est que l'espace de* départ *soit de dim. finie.*

Démonstration. Prenons une base de l'espace de départ. Soit alors $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, on a

$$\|f(x)\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) \right\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| \|f(e_i)\| \leqslant \operatorname*{Sup}_{i=1\dots n} |x_i| \sum_{i=1}^{n} \|f(e_i)\|$$

ce qui démontre que $\|f(x)\| \leqslant M.\|x\|$, avec $M = \sum_{i=1}^{n} \|e_i\|$ et $\|x\| = \operatorname*{Sup}_{i=1\dots n} |x_i|$.

Le résultat reste vrai pour toute autre norme : elles sont équivalentes ! ♦

Il en est de même des applications bi– ou multilinéaires (admis sans démonstration).

EXERCICE 31. *Montrer que dans une algèbre de dimension finie, il existe une norme pour laquelle*

$$\|x \times y\| \leqslant \|x\|\|y\|$$

(utile dans $\mathcal{L}(E)$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ou parfois $\mathbb{K}_n[X]$).

En particulier, les projections (sur les axes de coordonnées) sont continues. Ce qui prouve (par composition d'applications continues) que les coordonnées d'une application continue à valeurs dans un evn de dimension finie, coordonnées aussi appelées *composantes* de l'application, sont continues : Si $f(x) = \sum f_i(x).e_i$ et si f est continue, alors les f_i aussi. Mais l'expression même de $f = \sum f_i.e_i$ comme combinaison linéaire prouve que la réciproque est vraie : en résumé et comme on y avait déjà fait allusion (mais avec la norme produit seulement)

PROPOSITION. *Une application à valeurs dans un evn de dimension finie est continue $\iff$ ses composantes sont continues.*

En particulier, par combinaison de ces formes linéaires continues :

COROLLAIRE 6. *En dimension finie, les applications polynômiales sont continues.*

Il en est bien évidemment de même d'une fraction rationnelle (à plusieurs variables) sur son domaine de définition.
Similairement :

PROPOSITION. *En dimension finie, une suite converge si et seulement si les suites des coordonnées (dans n'importe quelle base) sont des suites* numériques *convergentes.*

Ceci généralise le cas des suites complexes, convergentes quand la suite des parties réelles et celle des parties imaginaires le sont.
On peut donc prolonger à la dimension finie la notion de convergence absolue d'une série :

PROPOSITION. *En dimension finie, si $(\sum \|u_n\|)$ converge (dans $\mathbb{R}_+$), alors $\sum u_n$ converge (dans E).*

Démonstration. En effet, pour la norme sup associée à une base de E, on a $\|u_n\| = \|\sum u_n^i e_i\| = \operatorname{Max}|u_n^i|$ et donc la convergence de $(\sum \|u_n\|)$ entraîne la convergence absolue de chaque série *numérique* $(\sum u_n^i)$, donc leurs convergences tout court, d'où celle de la série $(\sum u_n)$ dans E. ♦

Un résultat plus théorique :

COROLLAIRE 7. *Tout sev de dimension finie d'un evn est fermé.*

Démonstration. Soit F un sev de E, de dimension finie, et (u_n) une suite d'éléments de F, ayant une limite... pas forcément dans F (mais dans $\overline{F}$, un sev de E comme vu en exercice).
Posons $u_n = u_n^1 e_1 + \dots u_n^d e_d$ où $(e_1, \dots e_d)$ est une base de F. D'après la proposition précédente, $(u_n^1), \dots (u_n^d)$ sont d suites convergentes car images de (u_n) par des formes linéaires, continues car en dimension finie.
Mais alors $u_n^j \to \ell_j \in \mathbb{K}$ et donc (par linéarité de la limite)

$$u_n = u_n^1 e_1 + \dots u_n^d e_d \to \ell_1 e_1 + \dots \ell_d e_d \in F$$

et on a bien une limite qui est dans F. ♦

6.3 Compacts en dimension finie.

THÉORÈME DE BOLZANO-WEIERSTRASS.
En dimension finie, de toute suite bornée *on peut extraire une sous-suite convergente.*

Ce qui signifie exactement que les compacts sont les fermés bornés, cf. supra.

Démonstration. Une partie bornée est incluse dans une boule, et même une boule fermée. Quitte à appliquer une homothétie, ce qui ne change rien du point de vue topologique, on est ramené à la boule unité. Or cette boule est compacte pour la norme sup, donc pour tout norme : c'est déjà terminé. Si si !
De même pour un fermé borné : c'est un fermé dans une boule fermée, qui est compacte, donc un compact. ♦

EXERCICE 32.
Une application superbe : la distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie est toujours atteinte (mais on ne sait pas où !).

On a un corollaire de la caractérisation vue dans les compacts :

THÉORÈME 18. *Une suite bornée en dimension finie est convergente* $\Longleftrightarrow$ *elle possède une* unique *valeur d'adhérence.*

C'est un critère fort technique qui sert à prouver la convergence d'une suite dans des cas délicats.

7 Connexité par arcs

Il s'agit de se donner quelques outils pour exprimer qu'une partie est « d'une pièce », ou si on préfère « en un seul morceau ». Par exemple, on veut pouvoir affirmer que le cercle, une sphère, un plan, un tore, sont d'une pièce tandis que $\mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{R}^2$ privé d'une droite ne le sont pas.
On se place exclusivement en dimension finie.

DÉFINITION 30. *Un **arc** joignant les points* x *et* y *dans la partie* A *est une application continue de* $[0,1]$ *dans* A, *telle que* $\phi(0) = x$ *et* $\phi(1) = y$.
Une partie A *est **connexe par arcs** ssi pour tout couple de points* (x, y) *dans* A, *il existe un arc joignant* x *à* y.

En d'autres termes, on peut toujours tracer un chemin d'un point à un autre sans lever le crayon.

PROPOSITION. *Tout convexe est connexe par arcs.*

Démonstration. Soit A un convexe (non vide) et $x \in A$: alors pour tout $y \in A$, le segment $[x, y]$ est inclus dans A et c'est un arc de x à y, paramétré par $[0,1] \ni t \mapsto (1-t)x + ty$. ♦

REMARQUE 10. *En fait, dans la définition, on peut très bien remplacer* $[0,1]$ *par tout autre segment : on se ramène de l'un à l'autre par un changement de variable affine.*

On utilise assez souvent une astuce : pour prouver qu'une partie est connexe par arcs, il suffit de montrer que tout point peut être connecté à un point particulier.

DÉFINITION 31. *La* composante connexe par arcs *de* x *dans* A *est l'ensemble des* $y \in A$ *qui peuvent être reliés à* x *par un arc (continu).*

C'est tout simplement une classe d'équivalence de la relation “ être relié par un arc ”. A est cpa ssi il existe une seule ccpa.

EXERCICE 33. *Montrer que la ccpa de* $x \in A$ *est la plus grande partie connexe par arcs* B *tq* $x \in B \subset A$.

EXERCICE 34. *Montrer qu'une partie* étoilée *est connexe par arcs – c'est une partie* X *telle qu'il existe* $x \in X$ *vérifiant pour tout* $y \in X$ $[x, y] \subset X$.

THÉORÈME (PARTIES CONNEXES PAR ARCS DE $\mathbb{R}$).
Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ *sont les intervalles.*

Il n'est pas général que connexe et convexe soient synonymes : c'est le cas en dimension 1 sur $\mathbb{R}$, et pas ailleurs.

Démonstration. On utilise ici le fondamental

THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES DANS $\mathbb{R}$.
Soit f continue d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors $f(I)$ est un intervalle (i.e. est convexe).

Soit en effet un arc joignant x, y, deux points d'une partie connexe A de $\mathbb{R}$: c'est une application continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, donc elle vérifie le théorème ci-dessus, et donc l'image de f contient $[f(0), f(1)] = [x, y]$ ce qui caractérise la convexité : cette image est un intervalle. ♦

EXERCICE 35. *Montrer que le plan, la sphère, l'intérieur d'une boule privée de son centre, sont connexes par arcs. Montrer que $\mathbb{Q}$ ne l'est pas.*

Les applications qui conservent la connexité ne sont pas toutes continues, comme le prouve le

EXERCICE (THM DE DARBOUX). *Soit f dérivable (mais pas forcément $\mathcal{C}^1$) de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$; montrer que $f'([a, b])$ est un intervalle.*

Nous allons en déduire plus généralement une propriété fondamentale de la continuité : une application continue ne déchire pas, ou si l'on préfère l'image continue d'un morceau reste en un morceau [11].

THÉORÈME DE CONSERVATION DE LA CONNEXITÉ PAR UNE APPLICATION CONTINUE.
Soit f une application continue de A, partie connexe par arcs de E, à valeurs dans F ; alors $f(A)$ est connexe par arcs.

Dans le cas $F = \mathbb{R}$, $f(A)$ est donc un intervalle.
On utilise souvent ce théorème sous cette forme :
— Telle partie $A \subset E$ est connexe, et telle application est continue de E dans $\mathbb{R}$.
— En tel point, l'application a une valeur négative, en tel autre une valeur positive.
— Donc l'application s'annule sur la partie.

Démonstration. Soient deux points x', y' de $f(A)$: ils peuvent s'écrire $x' = f(x), y' = f(y)$. Comme A est connexe par arcs, il exiuste un chemin ϕ tel que $\phi(0) = x, \phi(1) = y$.
Mézalor $f \circ \phi$, continue comme composée d'applications continues, est un arc joignant x' à y'. ♦

***Exemple** :*
— Dans l'ensemble des matrices réelles $n \times n$, le déterminant est une application continue. L'image par cette application du groupe linéaire (ensemble des matrices inversible) est égale à $\mathbb{R}^*$, qui n'est PAS connexe. Donc le groupe linéaire ne l'est pas non plus. Avez-vous une idée du nombre de composantes connexes qu'il pourrait avoir ?
— En revanche, l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathbb{C}$ est connexe par arcs car étoilé – se ramener à la matrice nulle.
— $G\ell_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs, mais c'est difficile. On utilise le résultat de décomposition le plus général : pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, associée à l'endomorphisme u, il existe une décomposition de $E = \mathbb{C}^n$ en somme directe de sous-espaces où u induit la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent :

$$E = \bigoplus E_k \qquad u|_{E_k} = \lambda_k \,\mathrm{id}_{E_k} + n_k.$$

Si A est inversible, les λ_k sont tous non nuls. Donc pour tout k on peut écrire

$$\lambda_k = e^{\ln|\lambda_k| + i\arg\lambda_k} = e^{a_k + ib_k}.$$

Il suffit alors de définir (!) l'endomorphisme u_t par ses restrictions aux sous-espaces E_k, par

$$u_t|_{E_k} = e^{t(a_k+ib_k)}\,\mathrm{id}_{E_k} + tn_k.$$

On a alors $t \mapsto u_t$ qui est un chemin continu entre $u_0 = \mathrm{id}$ (puisque id sur chacun des E_k) et $u_1 = u$. Trivial, n'est-ce pas ?

11. Mais l'image continue d'une partie en petits morceaux peut n'en avoir qu'un : que l'on pense aux fonctions constantes !

EXERCICE 37. *Montrer que toute application continue de* $[0, 1]$ *dans* $\mathbb{Z}$ *est constante.*