

# Espaces préhilbertiens et leurs endomorphismes

6 février 2020

## 1 Produit scalaire

### 1.1 Définitions

#### 1.1.1 Formes bilinéaires

Dans un espace vectoriel, on a étudié en Sup des applications multilinéaires. Le cas le plus simple, à part celui des applications linéaires tout court, est celui des applications bilinéaires. Ce sont des applications qui généralisent la notion de produit, puisque une partie de la linéarité signifie ici « distributivité par rapport à l'addition ». Rappelons précisément la définition :

**DÉFINITION 1.** Une application  $B$  est bilinéaire, de  $E \times F$  dans  $G$ , ssi

- Elle est linéaire à gauche :

$$\forall x, x' \in E \quad \forall y \in F \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad B(x + x', y) = B(x, y) + B(x', y) \text{ et } B(\lambda x, y) = \lambda B(x, y)$$

- Elle est linéaire à droite (simile).

Un exemple trivial est le produit dans  $\mathbb{K}$  :  $(x, y) \mapsto x \cdot y$ .

En moins trivial on a le produit scalaire, qui est une *forme* bilinéaire. On a aussi le produit vectoriel dans  $\mathbb{R}^3$ . Citons aussi le produit d'une matrice et d'un vecteur colonne, par exemple :

$$(M, X) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mapsto M \cdot X$$

La suite de ce chapitre se concentre sur les formes bilinéaires telles que  $F = E, G = \mathbb{K}$  (c'est le sens du mot *forme*) et surtout  $B(x, x) \in \mathbb{R}_+ \forall x \in E$ . Il s'agit donc de généraliser ce qui a été vu en Sup sur les espaces euclidiens voire préhilbertiens.

Soit  $E$  un ev réel (de dim finie ou pas).

**DÉFINITION 2.** On appelle produit scalaire sur  $E$  une forme bilinéaire symétrique définie positive c'est à dire une application  $B : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifie :

(A1) pour  $y$  fixé,  $x \mapsto B(x, y)$  est linéaire.

(A2) pour  $x$  fixé,  $y \mapsto B(x, y)$  est linéaire.

(A3)  $\forall (x, y) \in E^2 \quad B(x, y) = B(y, x)$

(A4)  $\forall x \in E \quad B(x, x) \geq 0$

(A5)  $B(x, x) = 0 \iff x = 0$

Par exemple, pour  $E = \mathbb{R}$ , on peut prendre  $B(x, y) = x \times y$ .

**EXERCICE 1.** En fait, on ne peut pas prendre autre chose! Sauriez vous le prouver?

On peut en fait, dans la pratique, rassembler (A4) et (A5); de plus, (A2) + (A3) implique (A1).  
 $E$  muni de cette forme bilinéaire symétrique définie positive est un **espace préhilbertien** (réel) — en abrégé un pH. On notera en général  $\langle x | y \rangle$  ou  $x \cdot y$  ou  $(x | y)$  ou  $\langle x, y \rangle \dots$  pour  $B(x, y)$ .

## 1.2 Exemples.

$$1^\circ) E = \mathbb{R}^n, \quad (x | y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

C'est le produit scalaire canonique. Tout espace vectoriel réel de dimension finie peut donc être rendu préhilbertien (on parle alors d'espace euclidien).

$$2^\circ) E = C^0([a, b], \mathbb{R}), \quad f \star g = \int_a^b fg \mu$$

où  $\mu$  est n'importe quelle fonction continue  $> 0$  sur  $]a, b[$ .

$$3^\circ) E = \mathbb{R}[X], a < b, \quad \langle P | Q \rangle = \int_a^b P \times Q \times \mu$$

où  $\mu$  est n'importe quelle fonction continue  $> 0$  sur  $]a, b[$ . On peut même étendre à des intervalles ouverts, pour des densités  $\mu$  telles que  $\mu \times \text{polynôme}$  soit toujours intégrable, par exemple

$$(P, Q) \mapsto \int_{\mathbb{R}} P Q e^{-t^2} dt, \quad \int_0^\infty P Q e^{-t} dt, \quad \int_{\mathbb{R}} P Q e^{-|t|} dt,$$

sont des produits scalaires.

Remarque importante : pour ces produits scalaires il faut surtout penser à montrer

1. que le produit scalaire est bien défini (ie que les intégrales en question convergent)
2. que la forme bilinéaire est bien *définie* (i.e. que c'est un produit scalaire!).

Ce dernier point utilise toujours le lemme (intégrale d'une fonction continue positive = 0  $\Rightarrow$  la fonction est nulle sur l'intervalle), et dans le cas où  $E = \mathbb{R}[X]$  on *doit* mentionner qu'un polynôme s'annulant une infinité de fois est le polynôme nul ( $0_{\mathbb{R}[X]}$ ).

$$4^\circ) E = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum u_n^2 \text{ converge}\}, \quad B : (x, y) \in E \times E \mapsto \sum_{n=0}^\infty x_n \cdot y_n$$

Il faut montrer – c'est non trivial – que  $E$  est bien un ev, puis que  $B$  est un ps.  
 Tout cela repose sur un lemme :

$$\forall a, b \in \mathbb{C} \quad |ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$$

$$5^\circ) E = \{f \in C^0(I; \mathbb{R}) \mid \int_I f^2 \text{ converge}\}, \quad B : (x, y) \in E \times E \mapsto \int_I fg \quad \text{de même}$$

$$6^\circ) \mathcal{D} = \text{les fonctions continues } 2\pi\text{-périodiques}; \quad (f, g) \in \mathcal{D}^2 \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} fg$$

## 1.3 Orthogonalité

### 1.3.1 Diverses définitions

**DÉFINITION 3.** On dit que  $x$  et  $y$  sont **orthogonaux** ssi  $\langle x | y \rangle = 0$ . On dit plus généralement que deux parties  $A$  et  $B$  sont orthogonales ( $A \perp B$ ) ssi tout élément de  $A$  est orthogonal à tout élément de  $B$ . Enfin, l'**orthogonal** de  $A$ ,  $A^\perp$ , est l'ensemble des éléments de  $E$  qui sont orthogonaux à tous les éléments de  $A$ .

**PROPOSITION.** On a toujours  $A \cap A^\perp = \{0\}$ .

En effet un vecteur orthogonal à lui-même est nul (axiome 5).

**PROPOSITION.** L'orthogonal d'une partie non vide est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

On peut le vérifier à la main, ou passer par le magnifique Lemme suivant :

**LEMME 1.** L'orthogonal d'un vecteur non nul  $a \in E$  est un hyperplan.

*Démonstration.* On vérifie que  $x \mapsto \langle a | x \rangle$  est linéaire, son noyau est  $H = a^\perp$  qui est donc bien un sev. Par ailleurs,  $\text{Vect}(a)$  et  $H$  sont supplémentaires : en effet, tout vecteur  $x$  s'écrit

$$x = \frac{\langle a | x \rangle}{\langle a | a \rangle} a + \left( x - \frac{\langle a | x \rangle}{\langle a | a \rangle} a \right)$$

et le premier vecteur est colinéaire à  $a$ , tandis que le second est habilement choisi pour être dans  $H$  comme on le vérifie en faisant le produit scalaire avec  $a$ .  $\blacklozenge$

Cette construction est profonde : géométriquement, comment interpréteriez-vous ce vecteur miraculeux  $\frac{\langle a | x \rangle}{\langle a | a \rangle} a$ ? Comment le dessineriez-vous? Nous approfondirons la question plus bas.

**EXERCICE 2.**  $x \mapsto \varphi_x$  où  $\varphi_x(y) = (x | y)$  définit un morphisme injectif de tout  $pH$  réel  $E$  dans son dual  $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ .

**EXERCICE 3.** On considère  $E = \mathbb{R}[X]$  muni du produit scalaire  $\langle P | Q \rangle = \int_0^1 P \cdot Q$ . Quel est l'orthogonal du polynôme constant 1?

**EXERCICE 4.** \* On prend  $\mu = 1, [a, b] = [0, 1], E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ , et on définit  $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$ . Montrer que l'orthogonal de  $F$  est réduit à  $\vec{0}$ , bien que  $F \neq E$  (considérer des fonctions  $f_n \in F$  telles que  $f_n(0) = 0$  donc mais  $f_n = 1$  sur  $[1/n, 1]$ ), et montrer que  $f \in F \Rightarrow f^2 \in F$ .

**EXERCICE 5.** \* On considère  $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}), F = \mathbb{R}[X]$  muni du produit scalaire  $\langle f | g \rangle = \int_0^1 f \cdot g$ . Montrer que  $F^\perp = \{0\}$ . Pour cela prendre  $f \in E$  et considérer une suite  $(P_n)$  de polynômes qui converge uniformément vers  $f$ , en déduire que  $\langle f | f \rangle = 0$  et conclure.

Ces deux derniers exercices montrent que  $(F^\perp)^\perp$  n'est pas forcément égal à  $F$ . En revanche il y a toujours une inclusion évidente (laquelle?).

### 1.3.2 Somme directe orthogonale

Le cas d'un vecteur et de son orthogonal rentre dans une définition plus large :

**DÉFINITION 4.**  $F$  et  $G$  sont supplémentaires orthogonaux ssi ils sont supplémentaires et } orthogonaux (!). On note  $E = F \overset{\perp}{\oplus} G$ .

Remarquons que deux sous-espaces orthogonaux sont déjà forcément en somme directe. On a donc une caractérisation simple :

**PROPOSITION.**  $F$  et  $G$  sont supplémentaires orthogonaux ssi ils sont orthogonaux et de } plus  $F + G = E$ .

Par exemple en dimension finie, il suffira que  $\dim F + \dim G = \dim E$ .

Tout couple de supplémentaires orthogonaux permet de définir une projection orthogonale (et même deux) : à  $x \in E$  on associe l'unique vecteur  $p(x) \in F$  tel que  $x = p(x) + (x - p(x))$  où  $x - p(x) \in G = F^\perp$ .

Réciproquement si il existe une projection orthogonale  $p$  d'image  $F$  (i.e.  $x - p(x)$  est toujours orthogonal à  $F$ ), c'est que  $\text{Ker } p$  et  $F = \text{Im } p$  sont supplémentaires orthogonaux.

Cela se généralise à une somme de  $p$  sous-espaces orthogonaux deux à deux :

**DÉFINITION 5.**  $F_1 \dots F_p$  sont supplémentaires orthogonaux ssi ils sont 2 à 2 orthogonaux } et si leur somme est  $E$ . On note  $E = F_1 \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} F_p$ .

Par exemple dans  $\mathbb{R}^n$  muni du produit scalaire canonique, les axes de coordonnées sont supplémentaires orthogonaux.

## 1.4 Norme associée

### 1.4.1 Cauchy-Schwarz

**PROPOSITION.** On a pour tout couple  $(x, y)$  de  $E$  :

$$(x | y)^2 \leq (x | x) \times (y | y)$$

avec égalité si, et seulement si,  $x$  et  $y$  sont colinéaires.

*Démonstration.* Supposons que  $(x | y) \neq 0$ , sinon c'est fini. On considère alors la fonction de  $\mathbb{R}$  dans lui-même définie par

$$P(\lambda) = (x + \lambda y | x + \lambda y) = (x | x) + \lambda(y | x) + \lambda(x | y) + \lambda^2(y | y) = \|x\|^2 + 2\lambda(x | y) + \lambda^2\|y\|^2$$

qui est en fait un trinôme toujours positif. On peut en conclure que son discriminant (réduit) est négatif, ce qui donne précisément l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

N'oublions pas le cas d'égalité : dans ce cas, il faut que le trinôme admette une racine (double), donc que  $x + \lambda y$  s'annule. ♦

Remarque : on peut écrire alternativement (ce n'est pas exactement équivalent)

$$(x | y) \leq \sqrt{(x | x)(y | y)}$$

Pour qu'il y ait égalité, il faut alors que  $\lambda \geq 0$  ie que  $x$  et  $y$  soient **positivement** colinéaires. C'est bon à savoir (♥).

*Une application :*

Soit  $f$  une application à deux variables (ou plus). Au voisinage d'un point  $(x, y)$ , on a

$$f(x + \delta x, y + \delta y) - f(x, y) \approx \delta x \frac{df}{dx} + \delta y \frac{df}{dy} = \langle \nabla f | (\delta x, \delta y) \rangle.$$

Il en résulte que, si l'on ne change pas la longueur de la perturbation  $(\delta x, \delta y)$  mais seulement sa direction,

1. La valeur de  $f$  ne change pas si l'on se déplace perpendiculairement au gradient, i.e. **le gradient est orthogonal aux lignes de niveau.**
2. La valeur de  $f$  augmente de façon maximale si le déplacement est positivement colinéaire au gradient, et
3. diminue de façon maximale si on le déplacement est négativement colinéaire au gradient.

On peut en déduire deux algorithmes :

- L'un pour tracer les lignes de niveau  $f = C^{te}$  ;
- L'autre pour chercher le minimum de  $f$  (algorithme du gradient conjugué).

### 1.4.2 Inégalité de Minkowski

En notant dorénavant  $\|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle}$  on déduit de ce qui précède

$$\forall x, y \in E \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

En effet, au carré cela équivaut à

$$\langle x + y | x + y \rangle \leq \langle x | x \rangle + \langle y | y \rangle + 2\|x\|\|y\|$$

qui résulte de Cauchy-Schwarz et du développement de  $\langle x + y | x + y \rangle$ .

Il en résulte que  $\| \cdot \|$  est une norme, dite euclidienne ou préhilbertienne ou "norme 2".

On écrit parfois cette forme équivalente de Cauchy-Schwarz :

$$\forall x, y \in E \quad |\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Cette inégalité est fine, et sert à prouver des majorations délicates (on les reconnaît en général à la présence d'une racine dans le terme majorant).

## 1.5 Propriétés de la norme dans un pH

### 1.5.1 Équivalence entre norme et produit scalaire

On a des identités dites de **polarisation**, comme

$$4\langle x | y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 \quad 2\langle x | y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 \dots$$

Cela montre qu'il est équivalent de donner la norme, ou le produit scalaire : l'un(e) se déduit de l'autre.

### 1.5.2 Pythagore

En développant par bilinéarité  $\|x + y\|^2$ , il vient

**THÉORÈME DE PYTHAGORE.** Si  $\langle x | y \rangle = 0$ , alors  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ .

**COROLLAIRE 1.** Si on a une famille orthogonale  $(x_1, \dots, x_n)$  alors  $\|\sum x_i\|^2 = \sum \|x_i\|^2$ .

L'implication est une équivalence pour deux vecteurs, mais pas pour trois ou plus.

Il existe un très grand nombre de preuves de ce théorème (qui remonte à au moins 3000 ans...). Voyez <https://www.cut-the-knot.org/pythagoras/> pour 122 exemples! Certaines remontent à Euclide, les plus simples sont de la forme : voyez le dessin ; une autre a été trouvée par un président US! Et encore une par Léonard de Vinci, par Huygens...

### 1.5.3 Égalité de la médiane (ou du parallélogramme)

On a toujours

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Noter les démonstrations antiques par dessins de ces propriétés!

## 2 Familles orthonormales

### 2.1 Fabrication

#### 2.1.1 Définition

On appelle **famille orthogonale** toute famille dont les éléments sont deux à deux orthogonaux; une telle famille pourrait contenir le vecteur nul (plusieurs fois!), ce qui est peu seyant. Plus précisément, on appelle **famille orthonormale** toute famille orthonormale dont les éléments sont de norme 1 (i.e.  $\langle x | y \rangle = 0$  pour  $x \neq y$ , 1 si  $x = y$ ). Il faut retenir l'expression de la norme dans une base orthonormale :

$$\|x\|^2 = \left\| \sum x_i e_i \right\|^2 = \sum x_i^2$$

(dans un pH on met toujours les normes au carré!)

Remarquons que tout vecteur (non nul) peut être rendu unitaire, par

$$x \mapsto x/\|x\|.$$

**PROPOSITION.** *Toute famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul est libre.*

Un exemple fondamental : dans  $\mathcal{D}$  muni de  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} fg$ , les fonctions 1 et les  $\sqrt{2} \cos(nt)$  et  $\sqrt{2} \sin(nt)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  forment une famille orthonormale. De même avec

$$\varepsilon_n : t \mapsto e^{nit} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

à condition de définir le produit scalaire dans les complexes.

#### 2.1.2 Projection orthogonale sur une droite

Une droite possède toujours une base orthonormale! (B.O.N.).

Et il est facile de projeter orthogonalement sur une droite, i.e. de trouver pour tout vecteur  $x \in E$  une décomposition de la forme

$$x = d + h \quad \text{où } d \in \mathcal{D} \quad \text{et} \quad h \in \mathcal{H} = \mathcal{D}^\perp.$$

*Démonstration.* On cherche  $d$  sous la forme  $\lambda a$ , où  $a$  est un vecteur directeur de  $\mathcal{D}$ . On trouve que l'unique solution est  $\lambda = \frac{\langle a | x \rangle}{\langle a | a \rangle}$ . ♦

Ce calcul va nous permettre de (re)démontrer l'existence de BON **en dimension finie** par le...

#### 2.1.3 Procédé de Schmidt

Dans tout pH de dimension finie, il existe toujours une base orthonormale. Ceci résulte du

**PROPOSITION. Procédé d'orthogonalisation de Schmidt.**

Étant donnée une base quelconque, il existe une matrice de passage triangulaire, avec des 1 sur la diagonale, dans une base orthogonale.  
On en déduit facilement une BON en « normant » les vecteurs.

La démonstration fournit le procédé effectif de calcul.

*Démonstration.* On procède par récurrence : si  $(e_1 \dots e_n)$  est la base de départ, on suppose construits  $(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k)$ , famille orthogonale déduite de  $(e_1 \dots e_k)$  par une matrice triangulaire avec des 1 sur la diagonale.

On retranche alors à  $e_{k+1}$  ses projections sur les  $\varepsilon_i$  ( $i = 1 \dots k$ ), ce qui donne

$$\varepsilon_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{\langle \varepsilon_i | e_{k+1} \rangle}{\langle \varepsilon_i | \varepsilon_i \rangle} \varepsilon_i.$$

On a alors toutes les propriétés voulues de  $\varepsilon_{k+1}$ , et en particulier l'orthogonalité avec les précédents. ♦

*Attention! On retranche les projections sur les  $\varepsilon_i$  que l'on vient de construire, pas sur les  $e_i$  de la vieille base!*

**COROLLAIRE 2.** Si  $E$  est de dimension finie et  $F$  est un sev alors  $F^\perp$  est supplémentaire (orthogonal).

*Démonstration.* On prend une base adaptée à  $F$  et on l'orthogonalise. Si  $\dim F = p$ , on constate que les  $p$  premiers vecteurs restent dans  $F$  et que les  $n - p$  suivants sont orthogonaux à  $F$ . On a donc  $\dim F^\perp \geq n - p$ , ce qui suffit à conclure. Ceci sera généralisé par le Théorème 2. ♦

Le vecteur

$$p_k = \sum_{i=1}^k \frac{\langle \varepsilon_i | e_{k+1} \rangle}{\langle \varepsilon_i | \varepsilon_i \rangle} \varepsilon_i$$

est intéressant par lui-même :

dans  $V_k = \text{Vect}(e_1 \dots e_k) = \text{Vect}(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k)$ , il vérifie  $(e_{k+1} - p_k) \perp V_k$ . Plus généralement, étudions la

## 2.2 Projection orthogonale sur un sev de dimension finie

### 2.2.1 Définition

Rappelons qu'un projecteur est dit orthogonal ssi son noyau et son image (qui sont supplémentaires) sont orthogonaux.

**DÉFINITION 6.** On appelle **projection orthogonale sur** un sev  $F$  de  $E$  un projecteur  $p$ , tel que  $\text{Im } p = F$  et  $\text{Ker } p \perp F$ .

À noter que pour tout  $x \in E$ ,  $x - p(x) \perp F$ ; en particulier,  $x - p(x) \perp p(x)$  et donc

$$\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2 \quad \text{par Pythagore.}$$

Attention!  $F$  et  $F^\perp$  sont toujours **en somme directe**, mais pas toujours **supplémentaires** :

### 2.2.2 On ne peut pas toujours projeter sur un sev F...

**EXERCICE 6.** \* Montrer que si on peut projeter orthogonalement sur F, alors F est fermé  
 } (indic : si une projection est orthogonale alors c'est une application continue...).

... puisque l'on a trouvé par exemple des  $F \neq E$  tels que  $F^\perp = \{0\}$  et que nécessairement, s'il y a projection orthogonale sur F, alors F et  $F^\perp$  sont supplémentaires dans E. La condition nécessaire et suffisante existe, et elle est de nature topologique. Nous nous contenterons de la

### 2.2.3 Projection sur un sev de dimension finie

**THÉORÈME 2.** On peut projeter sur tout sev de dimension finie.

*Démonstration.* On écrit dans une BON  $(e_1, \dots, e_n)$  de F la formule

$$p(x) = \sum_{i=1}^n (e_i | x) e_i$$

qui définit bien une application linéaire, dont on vérifie que le noyau est  $F^\perp$ , l'image F, et qui est un projecteur. ♦

**Remarque pratique importante :** on peut se contenter d'une base **orthogonale** seulement (mais pas moinsssse!) en écrivant la formule plus générale :

$$p(x) = \sum_{i=1}^n \frac{(e_i | x)}{(e_i | e_i)} e_i.$$

**Exemple fondamental :** considérons le sev  $F_n$  de  $\mathcal{D}$  engendré par les applications  $\cos(kx)$  et  $\sin(kx)$  pour  $k = -n, \dots, 0, \dots, n$ . Alors la projection sur  $F_n$  de  $f \in \mathcal{D}$  n'est autre que la somme partielle  $a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$  de sa série de FOURIER.

### 2.2.4 Projection orthogonale et distance à un sev.

**La distance d'un point à une partie** est définie dans un evn quelconque par

$$d(x, A) = \text{Inf}_{a \in A} \|x - a\|.$$

Comme tout inf, cela existe mais n'est pas forcément atteint ( $\text{inf} \neq \text{min}$ ). Mais dans un espace préhilbertien s'offrent certaines possibilités :

**PROPOSITION.**

**Dans le cas où il existe une projection orthogonale sur F, alors pour tout  $x \in F$ , on a**

$$d(x, F) = \|x - p(x)\| :$$

*la distance minimale est atteinte en  $p(x)$ , et nulle part ailleurs.*

*Démonstration.* Pour  $y \in F$ , comme  $y - p(x) \in F$  et  $x - p(x) \perp F$ , on écrit par Pythagore

$$\|x - y\|^2 = \|(x - p(x)) + (p(x) - y)\|^2 = \|(x - p(x))\|^2 + \|(p(x) - y)\|^2 \geq \|x - p(x)\|^2 \quad \blacklozenge$$



On caractérise donc la projection orthogonale (de  $x$  sur  $F$ ) comme le point (de  $F$ ) le plus proche de  $x$  :

**COROLLAIRE 3.** *La projection orthogonale de  $x$  sur un sev  $F$  de dimension finie est l'unique point où la distance de  $x$  à  $F$  est atteinte.*

On a de surcroît l'inégalité de BESSEL : puisque

$$\|p(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|x - p(x)\|^2 \leq \|x\|^2$$

on a dans toute BON  $(e_i)$  de  $F$

$$\forall x \in E \quad \|p(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n (e_i | x)^2 \leq \|x\|^2$$

(une projection orthogonale *raccourcit* les distances, c'est même une caractérisation d'icelles parmi tous les projecteurs, cf. exos).

### 2.2.5 Application : calculs d'inf

Voyons un exemple : calculer  $\text{Inf} \int_0^\pi (x \sin t + y \cos t - t)^2 dt$ , c'est chercher la distance de la fonction  $t \mapsto t$  au sev  $F$  engendré par  $\cos$  et  $\sin$  de  $E = \mathcal{C}^0([0, \pi], \mathbb{R})$  muni du produit scalaire  $(f | g) = \int_0^\pi f \times g$ . Intuitif, non ? Il suffit donc de calculer la projection orthogonale sur ce sev. Par chance, on n'a pas à orthogonaliser  $(\cos, \sin)$  et on écrit directement, en notant  $I$  la fonction  $t \mapsto t$  pour voir plus clair :

$$\begin{aligned} p(I) &= \frac{(\cos | I)}{(\cos | \cos)} \mathbf{cos} + \frac{(\sin | I)}{(\sin | \sin)} \mathbf{sin} = \frac{2}{\pi} \left( \int_0^\pi t \cos t dt \mathbf{cos} + \int_0^\pi t \sin t dt \mathbf{sin} \right) \\ &= -\frac{4}{\pi} \mathbf{cos} + 2 \mathbf{sin}. \end{aligned}$$

On en déduit le résultat, qui est

$$\|I - p(I)\|^2 = \|I\|^2 - \|p(I)\|^2 = \int_0^\pi t^2 dt - \int_0^\pi \left(-\frac{4}{\pi} \cos t + 2 \sin t\right)^2 dt = \pi^3/3 - 2\pi - 8/\pi$$

**REMARQUE 1.** Ici, on a une base orthogonale, ce qui aide ! dans d'autres cas, on peut s'en passer avec un argument géométrique : la projection  $p(f)$  doit être telle que  $p(f) = a \cos + b \sin$  et que  $f - p(f)$  soit orthogonale à  $F$ , ce qui s'exprime par le système de Cramer

$$\begin{cases} a(\cos | \cos) + b(\sin | \cos) &= (f | \cos) \\ a(\cos | \sin) + b(\sin | \sin) &= (f | \sin) \end{cases}$$

d'où  $a, b$  et  $p(f)$ . . . Notez que ce système, dans le cas où la base est orthogonale, est diagonal, c'est à dire résolu.

**REMARQUE 2.** On peut projeter orthogonalement sur d'autres objets :

- Sur certains sev de dimension infinie (par exemple sur l'orthogonal d'un sev de dim finie !)
- Sur une sphère / une boule (exprimer la projection de  $x$  sur  $B_f(a, r)$ )
- Sur un convexe fermé, etc. . .

### 2.3 Familles totales

Commençons par un exemple assez général.

Soit  $E = C^0([a, b], \mathbb{R})$  muni de  $\langle f, g \rangle = \int_a^b fg$ . Fixons  $f \in E$ . On sait (théorème de Weierstrass) qu'il existe une suite de polynômes telle que  $f = \lim P_n$  au sens de la CV uniforme, c'est à dire que  $\sup_{[a,b]} |f - P_n| = \|f - P_n\|_\infty \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

Or  $\| \cdot \|_2 \leq \sqrt{b-a} \| \cdot \|_\infty$ . Donc on a aussi cette convergence pour la norme 2, i.e.  $\|P_n - f\|_2 \rightarrow 0$  - les polynômes sont denses dans  $E$  aussi pour la norme 2. Notons  $\| \cdot \|$  tout court pour cette norme dans la suite.

Fabriquons une telle suite  $(P_n)$ , en la choisissant échelonnée en degré :

**LEMME 1.** *Il existe une base orthonormale  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{R}[X]$  telle que  $d^\circ Q_n = n \forall n$ .*

*Démonstration.* Base canonique + procédé de Schmidt (cf. exemples en exercices). ♦

Soit alors  $P_n$  la projection orthogonale de  $f$  sur  $\mathbb{R}_n[X]$  : on a vu que

$$P_n = \sum_{k=0}^n \langle Q_k, f \rangle Q_k \text{ où } \|P_n\|^2 = \sum_{k=0}^n \langle Q_k, f \rangle^2 \leq \|f\|^2$$

J'affirme que  $P_n \rightarrow f$ . Il résulte de l'inégalité de Bessel juste citée que

$$\varepsilon_n = \|f - P_n\|^2 = \|f\|^2 - \left( \sum_{k=0}^n \langle Q_k, f \rangle^2 \right)$$

décroit, donc converge vers une limite...  $\geq 0$ . Ici c'est nécessairement 0. Pourquoi ?

En effet on sait que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $\|f - P\|^2 \leq \varepsilon$ . Soit  $n = d^\circ P$ , par caractérisation de la projection orthogonale on a

$$\|f - P_n\|^2 \leq \|f - P\|^2 \leq \varepsilon$$

ce qui prouve bien la convergence de la suite  $(P_n)$  vers  $f$ . Cela mérite un nom :

**DÉFINITION 7.** *Soit  $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une famille orthonormale d'un pH  $E$ . Cette famille est dite totale*  
 $\left\{ \begin{array}{l} \iff F = \text{Vect}(e_0, e_1 \dots e_k, \dots) \text{ est dense dans } E \text{ pour la norme 2. En langage plus clair,} \\ \text{si tout élément de } E \text{ est limite d'une suite de combinaisons linéaires des } e_k. \end{array} \right.$

**Exemple :** toute fonction continue  $2\pi$ -périodique est somme de sa série de Fourier, c'est à dire limite (pour la norme 2) d'une somme de cosinus et de sinus : les  $t \mapsto \cos(nt), \sin(nt)$  (avec un coefficient pour les normer) forment donc une famille totale dans l'espace  $\mathcal{D}$  (c'est le théorème de Parseval, hors-programme).

**PROPOSITION.** *Soit  $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une famille totale d'un pH  $E$ . Soit  $p_n$  la projection orthogonale*  
 $\left\{ \begin{array}{l} \text{sur } F_n = \text{Vect}(e_0, e_1 \dots e_n) ; \text{ alors pour tout } x \in E, p_n(x) \rightarrow x. \end{array} \right.$

Une façon intéressante de le dire est que  $\|x - p_n(x)\|^2 \rightarrow 0$ . Or comme on l'a vu c'est  $\|x\|^2 - \sum_{k=0}^n \langle x | e_k \rangle^2$ . La famille est donc totale (convergence de la série des  $\sum \langle x | e_k \rangle e_k$  vers  $x$  pour la norme préhilbertienne) si et seulement si  $\sum_{k=0}^\infty \langle x | e_k \rangle^2 = \|x\|^2$ .

La preuve est identique à celle que j'ai donné dans le cas des polynômes. Savoir la refaire éventuellement en adaptant pour un produit scalaire donné explicitement.

Notons que si  $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une famille orthonormale et qu'elle vérifie la conclusion de cette proposition (pour tout  $x \in E, p_n(x) \rightarrow x$ ), alors clairement la famille est totale : c'est donc une caractérisation, qui est parfois donnée comme définition.

Informellement, on a établi que tout  $x \in E$  peut s'écrire (et de manière unique. . .) comme

la somme de la série  $x = \sum_{n=0}^{\infty} \langle e_n | x \rangle \cdot e_n$ . D'où le nom de *base hilbertienne*. Attention! **Une**

**base hilbertienne n'est pas une vraie base**, la somme est infinie et n'est donc pas une combinaison linéaire (on a besoin en sus d'une notion de convergence, ici pour la norme 2). Nous en verrons des exemples en exercices et en problème, généralement des familles de polynômes échelonnées en degré qu'on peut obtenir en "Schmidtifiant" la base canonique. Noter aussi que (en revenant au cas des polynômes donné en exemple)  $p_n(f)$  est LE polynôme qui approxime le mieux  $f$  - pour la norme préhilbertienne considérée, et à degré fixé. On a donc un procédé constructif, algorithmique, pour construire des approximations polynômiales optimales (pour la norme 2) de fonctions.

**Exemple**: Revenons à l'exemple des fonctions continues  $2\pi$ -périodiques et de la famille totale des  $\cos(nt), \sin(nt)$  (DSF). On obtient pour la fonction définie entre 0 et  $2\pi$  par  $t \mapsto \frac{\pi-t}{2}$  et prolongée par périodicité

$$f(t) = \frac{\pi-t}{2} = \sum \frac{\sin(nt)}{n}$$

où la convergence s'entend au sens ci-dessus [il y a aussi convergence simple, mais pas uniforme sur  $\mathbb{R}$  à cause du défaut de continuité en 0], c'est à dire que

$$\|f\|^2 = \sum_{n \geq 1} \left\| \frac{1}{n} \sin(nt) \right\|^2 \quad \text{soit en calculant} \quad \frac{\pi^2}{12} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \times \frac{1}{2}.$$

De nombreuses belles égalités d'Analyse s'obtiennent ainsi.

### 3 Endomorphismes particuliers dans un espace euclidien

Jusqu'à la fin du chapitre on se place dans un espace euclidien, i.e. un pH de dimension finie (ou un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire si vous préférez).

#### 3.1 Endomorphismes symétriques

**DÉFINITION 8.** L'endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est dit symétrique ssi



$$\forall x, y \in E \quad \langle u(x) | y \rangle = \langle x | u(y) \rangle$$

L'adjectif moderne est plutôt "autoadjoint", mais comme la notion d'adjoint n'est plus au programme, on dit "symétrique" dans notre programme.

Par exemple toute homothétie est symétrique. La présence du produit scalaire dans la définition induit des propriétés géométriques. Ainsi

**LEMME 2.** SI  $F$  est un sev stable par  $u$  symétrique, alors  $F^\perp$  aussi.

*Démonstration.* Soit  $y \in F^\perp : y \perp x, \forall x \in F$ . Or  $u(x) \in F$ , donc

$$\langle u(y) | x \rangle = \langle y | u(x) \rangle = 0 \text{ i.e. } u(y) \in F^\perp \quad \blacklozenge$$

**LEMME 3.** Deux espaces propres distincts de  $u$  symétrique sont orthogonaux.

*Démonstration.* Soient  $x, y$  des vecteurs propres associés respectivement à  $\lambda, \mu$  :  
 $u(x) = \lambda x, u(y) = \mu y$ . Alors

$$\mu \langle x | y \rangle = \langle x | u(y) \rangle = \langle u(x) | y \rangle = \lambda \langle x | y \rangle$$

Donc si  $\lambda \neq \mu, x \perp y$ . ♦

On a une caractérisation matricielle plaisante :

**PROPOSITION.**  $u \in \mathcal{L}(E)$  est symétrique ssi sa matrice dans une B.O.N est symétrique.

*Démonstration.* D'abord regardons la matrice ce  $u \in \mathcal{L}(E)$  quelconque dans une B.O.N  $(e_1, \dots, e_n)$  : le coefficient  $a_{i,j}$  est la coordonnée de  $u(e_j)$  sur le vecteur  $e_i$ , on a donc la formule

$$a_{i,j} = \langle e_i | u(e_j) \rangle$$

Or si  $u$  est symétrique,  $\langle e_i | u(e_j) \rangle = \langle e_j | u(e_i) \rangle$  et donc  $a_{i,j} = a_{j,i}$  pour tout couple  $(i, j)$  i.e. la matrice est symétrique.

Réciproquement, soit  $u$  un endomorphisme de matrice  $A = {}^t A$  dans une B.O.N  $(e_1, \dots, e_n)$ . D'après le calcul précédent on a donc  $\langle e_i | u(e_j) \rangle = \langle e_j | u(e_i) \rangle$ . Par linéarité on en déduit pour tout couple  $(x, y)$

$$\langle u(x) | y \rangle = \langle u(\sum x_i e_i) | \sum y_j e_j \rangle = \sum x_i y_j \langle u(e_i) | e_j \rangle = \sum x_i y_j \langle e_i | u(e_j) \rangle = \sum \langle x_i e_i | u(y_j e_j) \rangle = \langle x | u(y) \rangle$$

i.e.  $u$  est symétrique. ♦

Donnons deux cas d'endomorphismes connus :

**PROPOSITION.** Un projecteur (resp. une symétrie) est symétrique ssi ses deux espaces  
 } propres sont orthogonaux.

Hé oui : il y a des symétries symétriques et des symétries non symétriques!!!

*Démonstration.* Faisons la preuve pour un projecteur, l'autre cas est similaire. Soit donc  $u$  un projecteur. Considérons une base adaptée, i.e.  $(e_1, \dots, e_r)$  est une B.O.N. de  $\text{Im } u$  et  $(e_{r+1}, \dots, e_n)$  est une B.O.N. de  $\text{Ker } u$ .

Sens réciproque : supposons  $\text{Ker } u \perp \text{Im } u$ . Alors la même base  $(e_1 \dots e_n)$  est une B.O.N. de  $E$  tout entier, et la matrice de  $u$  dans cette base est ach'te symétrique (quelques 1 sur la diagonale et des 0 partout ailleurs) donc  $u$  l'est aussi.

Sens direct : supposons  $u$  symétrique. Alors par le Lemme 3,  $\text{Im } u$  et  $\text{Ker } u$ , qui sont ses deux espaces propres, sont orthogonaux. ♦

### 3.2 Le théorème spectral

**LEMME 4.** Tout endomorphisme symétrique en dimension 2 est diagonalisable dans une  
 } B.O.N.

À la main, facilement : le polynôme caractéristique de  $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$  est  $\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - b^2)$  et son discriminant vaut  $\Delta = (a + d)^2 - 4(ad - b^2) = (a - d)^2 + 4b^2 > 0$  sauf quand  $A = aI_2$ ,

cas trivial. On a donc toujours (ce cas excepté) deux v.p. distinctes, donc deux droites propres, qui sont orthogonales d'après le lemme 3.

**LEMME 5.** *Tout endomorphisme réel admet une droite, ou un plan, stable.*

*Démonstration.* Factorisons le polynôme minimal  $\mu_u(X) = \prod (X - \lambda)^{m_\lambda} \prod (X^2 + a_i X + b_i)$  où les trinômes sont irréductibles.

S'il y a des facteurs du premier degré  $X - \lambda$ , il y a des valeurs propres, donc des vecteurs propres, donc des droites stables. Excluons ce cas trop facile. Il est donc

$$\mu_u(X) = \prod (X^2 + a_i X + b_i) = (X^2 + a_1 X + b_1) \prod_{i \geq 2} (X^2 + a_i X + b_i)$$

Je dis que  $u^2 + a_1 u + b_1 \text{id} \in \mathcal{L}(E)$  n'est pas injectif (= bijectif = inversible) : sinon on aurait  $\prod_{i \geq 2} (u^2 + a_i u + b_i \text{id}) = 0_{\mathcal{L}(E)}$  ce qui contredirait la minimalité de  $\mu_u$ . Donc  $\text{Ker}(u^2 + a_1 u + b_1 \text{id})$  contient au moins un vecteur non nul  $x$ . Il est alors immédiat que  $\text{Vect}(x, u(x))$  est stable par  $u$ . ♦

Supposons le Thm démontré en dimension  $< n$  et soit  $E$  de dimension  $n > 2$ . Par le lemme 4, on a un sev stable  $F$  de dimension 1 ou 2. On a aussi  $F^\perp$  stable par le Lemme 2. Or  $\dim F^\perp < n$ , donc par hypothèse de récurrence  $F^\perp$  admet une BON de vecteurs propres.  $F$  aussi, en recollant on a une BON de vecteurs propres de  $E$  entier.

Par récurrence sur la dimension de l'espace, on a prouvé (constructivement !)

**THÉORÈME 3.** *Tout endomorphisme symétrique est diagonalisable dans une B.O.N.*

La traduction matricielle est évidente :

**COROLLAIRE 4.** *toute matrice symétrique **réelle** est diagonalisable dans une B.O.N., c'est à dire que la matrice de passage est orthogonale i.e. passe d'une B.O.N. à une autre (cf. infra).*

À noter que si  $D$  est diagonale, un changement de B.O.N. donne

$$A' = PAP^{-1} \text{ avec } P^{-1} = {}^tP \quad (\text{i.e. } P \text{ est orthogonale})$$

ce qui prouve bien que  $A'$  est symétrique. C'est la réciproque qui aura été dure !

### 3.3 Isométries vectorielles d'un espace euclidien

#### 3.4 Isométries.

**PROPOSITION.** *Un endomorphisme  $u$  de  $E$  est une isométrie ssi l'une au choix des propriétés suivantes est vérifiée :*

- $u$  conserve la norme :  $\|u(x)\| = \|x\|$ .
- $u$  conserve le produit scalaire :  $u(x).u(y) = x.y$ .
- $u$  envoie une certaine B.O.N. sur une B.O.N.
- $u$  envoie **toute** B.O.N. sur une B.O.N.

*Démonstration.* Conserver norme ou p.s. c'est pareil puisque l'une se déduit de l'autre (cf. identités de polarisation). La conservation du produit scalaire entraîne que l'image d'une

BON est une B.O.N. Réciproquement on vérifie par le calcul (par linéarité de  $u$  et bilinéarité du p.s.) que si  $u$  conserve le p.s. sur une B.O.N. (càd l'envoie sur une autre B.O.N.) alors le p.s. est conservé aussi pour deux vecteurs quelconques  $x = \sum x_i e_i$  et  $y = \sum y_j e_j$ . ♦

En fait, on n'a même pas besoin de la linéarité (voir exo).

**PROPOSITION.** et Définition.

L'ensemble de toutes les isométries (linéaires) de  $E$  est un groupe, dit groupe orthogonal de  $E$  et noté  $\mathcal{O}(E)$ . Le groupe spécial orthogonal  $\mathcal{SO}(E)$  est le sous-groupe de  $\mathcal{O}(E)$  des endomorphismes de déterminant 1. Ses éléments s'appellent les **rotations**.

Si l'on a fixé une B.O.N., et notamment dans  $\mathbb{R}^n$  euclidien avec sa base canonique, on a la caractérisation matricielle

**DÉFINITION 9.** La matrice  $A$  est orthogonale ssi elle vérifie  $A^t A = I_n$  (ou de manière équivalente  ${}^t A A = I_n$  : l'inverse est la transposée).

Cela signifie exactement que ses colonnes forment une B.O.N. !  $A$  est une matrice de rotation si **par surcroît** son déterminant est  $+1$ . On note  $\mathcal{O}(n), \mathcal{SO}(n)$  les groupes de matrices correspondants.

*Démonstration.* Le terme général de  $A^t A$  est égal à  $\sum_k a_{k,i} a_{k,j}$ . Donc en notant  $C_j$  la  $j^e$  colonne de  $A$ , la relation  $\sum_k a_{k,i} a_{k,j} = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases}$ , i.e.  $A^t A = I_n$ , signifie exactement que la famille des  $(C_j)$  est orthonormale. Or ces  $C_j$  sont les vecteurs images de la base canonique, orthonormale. Par la dernière caractérisation des isométries, cela équivaut à avoir une matrice d'isométrie. C'est aussi la meilleure façon de vérifier pratiquement qu'une matrice est orthogonale. ♦

**REMARQUE 3.** Cette condition signifie que l'on respecte la formule matricielle du produit scalaire. En effet,  ${}^t X' . X' = {}^t X . {}^t P . P . X$  ne pourra rester égal à  ${}^t X . X$  qui si  ${}^t P . P = I$ .

**PROPOSITION.**

- toute valeur propre éventuelle d'une isométrie est  $\pm 1$ .
- le déterminant d'une isométrie est lui aussi  $\pm 1$ .

*Démonstration.* En effet, si  $u(x) = \lambda x$  alors  $\|u(x)\| = \|x\| \Rightarrow |\lambda| = 1$ . De plus,  $1 = \det I_n = \det(A^t A) = \det(A)^2 \Rightarrow |\det(A)| = 1$ . ♦

**ATTENTION!** Des générations de taupins inattentifs croient que la condition  $\det A = +1$  est (selon les phases de la lune) nécessaire, ou peut-être suffisante, pour avoir une isométrie. Elle n'est ni l'une, ni l'autre. Cela peut arriver, mais c'est complètement ambidextre (cf. divorces dans le Maine / margarine).

Retenez que les isométries sont plutôt rares, car il y a  $\frac{n(n+1)}{2}$  relations à calculer pour vérifier qu'on a bien une isométrie de  $\mathbb{R}^n$ .

### 3.5 Réduction des isométries

On démontre encore plus facilement (par conservation de l'orthogonalité) que pour les endomorphismes symétriques, que

**LEMME 6.** *L'orthogonal d'un sev stable par une isométrie est encore stable.*

En repartant de l'existence d'un sev stable de dimension 1 ou 2 (Lemme 5), on obtient par récurrence sur la dimension

**THÉORÈME 4.** *Pour toute isométrie  $u$  de  $E$  il existe une décomposition de  $E$  en somme directe orthogonale de plans ou de droites stables.*

**THÉORÈME 5.** *Toute matrice orthogonale est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs, les blocs étant des scalaires de valeur  $\pm 1$  ou des blocs de matrices de rotation  $2 \times 2$  de la forme  $\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ .*

*Démonstration.* Il suffit de regarder ce qui se passe dans un plan stable (sur une droite stable la v.p. est forcément  $\pm 1$ ). La restriction de  $u$  étant une isométrie de ce plan, on a besoin d'énumérer toutes les matrices orthogonales en dimension 2. Or on a le

**LEMME 7.** *En dimension 2 les matrices (dans une BON) d'isométries prennent l'une des deux formes suivantes :  $\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$  ou  $\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}$ .*

Ce résultat est à savoir! Il se vérifie par un calcul bourrin (prendre  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ...) ou plus subtil : la première colonne étant le premier vecteur d'une BON s'écrit  $C_1 = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ . La deuxième aussi :  $C_2 = \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \end{pmatrix}$ , la condition d'orthogonalité donne

$$\cos t \cos s + \sin t \sin s = 0 = \cos(t - s) \iff t = s \pm \frac{\pi}{2}$$

ce qui donne les deux solutions. On vérifie que dans le deuxième cas (déterminant =  $-1$ ) les v.p. sont  $-1$  et  $1$ , c'est à dire qu'il s'agit d'une symétrie axiale (orthogonale).

Ce deuxième cas peut donc se ramener à deux blocs  $1 \times 1$ . Le premier est le seul qui ne puisse se réduire plus, d'où le théorème. ♦

Dans le cas des rotations, en regroupant si nécessaire les  $-1$  qui sont nécessairement en nombre pair, et en les écrivant  $\cos \pi$ , on peut arriver à une expression plus régulière :

**PROPOSITION.** *La matrice d'une rotation est diagonalisable par blocs  $2 \times 2$  de la forme  $\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ .*

Ainsi une 'rotation' en dimension 4 a, non pas un, mais **deux** angles (au signe près)!

### 3.6 Cas des rotations en dimension 3

**LEMME 8.** *Toute rotation de  $\mathbb{R}^3$  admet 1 comme valeur propre.*

*Démonstration.* On pourrait utiliser le théorème général de réduction. Directement, il y a au moins une racine réelle au polynôme caractéristique puisqu'il est de degré 3, et s'il y en a plus d'une il y en a 3 (par conjugaison). Les v.p. réelles étant égales à  $\pm 1$ , s'il y en a 3 elles sont  $1, -1$  et  $-1$  (ou  $1, 1, 1$ ). S'il y en a une seule réelle, il y a deux racines complexes conjuguées, de produit donc  $> 0$  ce qui oblige la réelle à être  $> 0$  aussi pour que le produit des trois fasse  $+1$  (c'est le cas général comme on le verra). ♦

Il y a donc *un axe* de points fixes, l'espace propre  $E_1$ . Son orthogonal est stable par la rotation (qui conserve l'orthogonalité). En calculant le déterminant, ou en appliquant carrément le théorème général, on trouve que la restriction à ce plan de la rotation est encore une rotation ( $\det = +1$ ); on trouve donc dans une B.O.N. adéquate une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

**Attention!!!**  $\theta$  n'est défini qu'au signe près (tout dépend comment l'on **oriente** l'axe des points fixes) : il y a toujours **deux** rotations d'axe  $\Delta$  et d'angle  $\theta$  (inverses l'une de l'autre). Il n'y a pas de méthode évidente pour déterminer "les éléments" d'une rotation :

1. Vérifier qu'on a bien une matrice orthogonale (les 3 colonnes forment une BON, 6 calculs au total).
2. Pour savoir si on a une rotation ( $\det = +1$ ) on peut éviter le calcul du déterminant, en effet la troisième colonne est, dans ce cas uniquement, le produit vectoriel de la première par la deuxième, ce qui peut se voir en comparant le signe du dernier terme (par exemple) et de son cofacteur.
3. Si on a affaire à une rotation, on détermine son axe par le système  $AX = X$ . *on oriente cet axe par choix d'un vecteur directeur,  $u$ .*
4. On choisit un vecteur  $v \perp u$ . L'angle  $\theta$  est connu au signe près (car  $\text{Tr } A = 2 \cos \theta + 1$ ). Ce signe va dépendre du choix de  $u$  (ou  $-u$ ). En effet, on calcule  $w = A.v$ .  
Règle pratique : si  $v \wedge w$  est dans la direction de  $u$ , alors  $\theta > 0$ , sinon  $\theta < 0$  (en convenant que  $-\pi < \theta < \pi$ ).

À savourer en exercice.