Séries d'éléments d'un evn
Classe de Spéciales MP

par Emmanuel AMIOT

31 août 2020

1 Séries et convergence

Les définitions générales qui sont données ici dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sont vraies dans le contexte d'un espace vectoriel normé, c'est à dire l' espace le plus général dans lequel on sache additionner, multiplier par un nombre, et passer à la limite. C'est d'ailleurs le contexte de notre programme. Mais en pratique on considérera presque exclusivement des séries **numériques**, au moins dans un premier temps.

1.1 Définition

On révise les notions abordées en Sup. Étant donnée une **suite** (u_n) (d'éléments d'un evn E), il arrive très souvent que l'on ait à considérer la suite **associée** :

$$s_0 = u_0 \quad s_1 = u_0 + u_1 \quad \dots s_n = u_0 + \dots + u_n = s_{n-1} + u_n$$

On parle alors de la *série* $\left(\sum u_n\right)$. Nous verrons des séries **numériques**, comme $1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \ldots = \left(\sum \dfrac{(-1)^n}{2n+1}\right)$, des séries de matrices, et des **séries de fonctions**, où le terme général u_n dépend d'une variable x : par exemple $\left(\sum x^n/n!\right)$.

Ce concept est preque aussi ancien que celui de suite : le fameux Paradoxe de ZÉNON D'ÉLÉE (ou « paradoxe d'Achille et la tortue ») met en doute la possibilité de faire la somme de l'infinité des termes d'une série géométrique.

Le problème avec les séries est qu'elles sont infinies (par exemple, Doctor Who). Et l'infini est riche en paradoxes, apories et autres grands moments de solitude. Il faut donc des définitions rigoureuses, ne pas se fier à son intuition, et généralement travailler en mathématicien, pour ne pas tomber dans les pièges de l'infini.

EXERCICE 1. *Pourquoi Achille peut-il rattraper la tortue ?*

PROPOSITION. *Il y a bijection entre l'ensemble des suites et celui des séries à valeurs dans E. La suite associée à la série de terme général s_n est donnée par*

$$u_0 = s_0 \qquad \forall n \geqslant 1 \quad u_n = s_n - s_{n-1}$$

EXERCICE 2. *Montrer que la correspondance entre les suites (u_n) et (s_n) est linéaire. Peut-on considérer sa « matrice » ? son inverse ?*

Il faut se souvenir que la **suite** (s_n) va converger si et seulement si la **série** $\left(\sum(s_n - s_{n-1})\right)$ converge : c'est un procédé très courant (cf. infra, constante d'Euler et formule de Wallis) pour étudier une suite que de se ramener à une série.

1.2 Convergence d'une série

Il parait (trompeusement) simple de définir la convergence de la série $\left(\sum u_n\right)$:

DÉFINITION 1. *La série* $(\sum u_n)$ *converge si, et seulement si, la suite des sommes partielles* $(s_n) = (u_0 + \ldots + u_n)$ *converge. On écrit alors*

$$\ell = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n\geqslant 0} u_n = \lim_{n\to+\infty} s_n$$

On dit dans ce cas que la série $(\sum u_n)$ *est convergente (de somme* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \ell$*), sinon elle est divergente.*

CAS DES SÉRIES GÉOMÉTRIQUES. *La série* $\sum a^n$ *converge (pour* $a \in \mathbb{C}$*) si et seulement si* $|a| < 1$ *comme on le voit sur la somme partielle* $s_n = \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$ *(le cas* $a = 1$ *est vite vu).*

UNE SÉRIE TÉLESCOPIQUE. *La série* $\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$ *converge et sa somme est* $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = 1$*, car*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$$

Noter la différence de notation, utile à respecter au moins pour les débutants, entre la **série** (qui est la donnée d'une infinité de nombres), et **sa somme** (qui est un nombre).

Il serait absurde que dire que « 2 converge », n'est-ce pas ? Pourtant on lit souvent « $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}$ converge »?...

Ce serait comme de confondre un relevé bancaire et le chiffre qui figure tout en bas (l'état du compte). Retenez qu'une série est un **programme** :

```
s:=0 ; n:=0;
while true do
        s := s + u(n)
        n++
```

alors que sa somme (quand elle existe, **SI** elle existe !) est le résultat du programme... après un temps infini.

— Ainsi la série $\left(\sum \dfrac{1}{n(n+1)}\right)$ converge, alors que $\left(\sum \ln(1 + \dfrac{1}{n})\right)$ diverge $(n \geqslant 1)$

— Pour les séries convergentes, **et pour elles seulement**, on peut définir le reste d'ordre n :

$$R_n = \ell - s_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Il est parfois utile de noter que $\boxed{u_n = R_{n-1} - R_n}$.

— En fait, cette notion cruciale de convergence a mis plusieurs siècles à se dégager clairement ! et il existe d'autres définitions de la convergence d'une série, qui permettent de donner une valeur à certaines séries qui divergent au sens que nous avons défini.

— Il n'est pas du tout facile de concevoir ce que signifient convergence et surtout divergence, comme le démontrent les exemples suivants :

— La série $1 - 1 + 1 - 1 + 1 \ldots$ diverge, ainsi que la série harmonique $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \ldots + 1/n + \ldots$.

— En revanche, la série harmonique alternée

$$1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \ldots + (-1)^{n-1}/n + \ldots = \sum \frac{(-1)^n}{n+1}$$

converge ! (sa somme vaut $\ln 2$).

— Diverger ne signifie pas forcément « diverger vers ∞ ». C'est la même chose pour les suites : par exemple les séries $(\sum (-1)^n)$ ou $(\sum \sin(n\theta))$ divergent alors que leurs sommes partielles restent bornées.

— À raisonner sur la somme d'une série... divergente, on peut très bien trouver sa valeur... Par exemple, si on définit $f_0 = f_1 = 1, f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ la suite de FIBONACCI, il vient "aisément"

$$\begin{array}{ll} S = & 1+1+2+3+5+8+\ldots \\ S & =1+1+2+3+5+\ldots \\ S+S = & 1+2+3+5+8+13+\ldots = S-1 \end{array}$$

d'où $2S = S - 1$ et $S = -1$ alors que clairement $(\sum f_n)$ diverge vers $+\infty$!

EXERCICE 3. *Que peut on dire de la série* $\left(\sum u_n\right)$ *si la suite* (u_n) *est stationnaire ?*

EXERCICE 4. *Démontrer les assertions sur la convergence des séries ci-dessus.*

EXERCICE 5. *(5/2) Calculer* $\mathrm{fibo}(x) = \sum_{n\geqslant 0} f_n x^n$ *en précisant le rayon de convergence (effectuer* $(1-x-x^2)\times f(x)$*) et faire* $x = 1$ *dans le résultat. Qu'en pensez-vous ?*

1.3 Propriétés des séries convergentes

1.3.1 Espace vectoriel des séries convergentes

Comme pour les suites, la convergence a des propriétés de linéarité :

PROPOSITION. *L'ensemble des séries convergentes (à valeurs dans* E*) est un espace vectoriel. Plus précisément, si* $(\sum u_n)$ *et* $(\sum v_n)$ *convergent, si* λ, μ *sont des scalaires, alors la série* $(\sum \lambda.u_n + \mu.v_n)$ *converge, et sa somme vaut*

$$\sum_{n\geqslant 0} \lambda.u_n + \mu.v_n = \lambda \sum_{n\geqslant 0} u_n + \mu \sum_{n\geqslant 0} v_n$$

Démonstration : on passe aux sommes partielles.
Il importe de remarquer la propriété (négative) suivante :

PROPOSITION. *Si* $(\sum u_n)$ *converge et* $(\sum v_n)$ *diverge, alors* $(\sum(u_n + v_n))$ *diverge.*

On l'emploiera très souvent pour prouver la divergence d'une série. Plus généralement, on a « CV+CV = CV, CV + DV = DV, DV + DV = n'importe quoi ».

EXERCICE 6. *Montrer à l'aide des exercices précédents que la série* $\left(\sum \frac{1}{2n+1}\right)$ *diverge.*

Attention, ne calculez pas sur des sommes de séries... divergentes ! **On assure d'abord la convergence de tous les objets concernés ou, dans le doute, on revient aux sommes partielles.**
Un exemple trouvé dans une copie il y a quelques d'années, qui trouve une valeur infinie à la constante d'Euler !

$$\begin{aligned}
\gamma &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \text{ (par définition)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \qquad \text{(la fatale erreur est commise)}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty}\ln(n+1) + \sum_{n=1}^{\infty}\ln n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty}\ln(n+1) + \sum_{n=0}^{\infty}\ln(n+1) \qquad \text{(en réindexant, c'est plus clair)}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty}\ln(n+1) + \sum_{n=1}^{\infty}\ln(n+1) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = +\infty!!!! \qquad \text{(la conclusion est maintenant inéluctable...)}
\end{aligned}$$

1.3.2 Divergence grossière

La propriété que nous allons établir montre l'avantage de travailler sur des séries plutôt que sur des suites : certaines propriétés sont beaucoup plus évidentes.
Celle-ci touche à un domaine critique, qui est la « taille » du terme général. On a vu avec les exemples donnés qu'elle n'est pas déterminante pour la convergence, mais il y a tout de même des limites à ne pas dépasser :

PROPOSITION.
SI *la série* $(\sum u_n)$ *converge,* **ALORS** $u_n \to 0$.
SI $u_n \not\to 0$, **ALORS** *la série* $\sum u_n$ *diverge. On parle dans ce cas de divergence grossière.*

Exemple : la série $(\sum(-1)^n n!)$ est grossièrement divergente [1].

Démonstration. $s_n \to \ell$ et donc $s_{n-1} \to \ell$ d'où $u_n = s_n - s_{n-1} \to \ell - \ell = 0$. ♦

1. Ce qui n'empêcha pas Euler de calculer sa somme avec trois décimales par une méthode numérique

REMARQUE 1. *ATTENTION ! ! ! nous avons donné une condition **nécessaire**, mais pas **suffisante**, de convergence. Il sufit de se remémorer l'exemple fondamental de **la série harmonique**. Pensez-y souvent.*

Cette erreur est très fréquente. Pour l'éviter, il suffit pourtant de mémoriser : « si le terme général tend vers 0, alors JE NE PEUX RIEN CONCLURE ».

2 Séries de nombres réels

On va s'intéresser presque exclusivement aux séries à termes positifs (sauf au dernier paragraphe de cette section).

2.1 Convergence des séries à termes positifs

2.1.1 Critère de convergence

Observons que, dans ce contexte, la suite (s_n) des sommes partielles est une suite (positive et) croissante de réels. On sait qu'une telle suite converge ssi elle est majorée. D'où :

THÉORÈME 1. *Pour que la série à termes* positifs $(\sum u_n)$ *converge, il faut et il suffit que la suite des sommes partielles* (s_n) *soit majorée. Alors on a*

$$\sum_{n\geqslant 0} u_n = \lim_{p\to+\infty} s_p = \operatorname{Sup}_p s_p$$

Il arrive que l'on emploie ce théorème tel quel, mais il va surtout nous permettre d'étudier la convergence de nombreuses séries par comparaison à des séries de référence.

2.1.2 Séries classiques à termes positifs

Traçons deux droites (sécantes) et des séries de points $A_1 \dots A_n$ et $B_1 \dots B_n$ sur chacune telles que les (A_iB_i) restent parallèles, ainsi que les (B_iA_{i+1}). Cette construction explique le nom de

Séries géométriques

Ce sont comme on le sait les séries $\sum u_0.r^n$. Rappelons les expressions à connaître par cœur, pour $r \neq 1$:

$$1 + r + r^2 + \dots r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r} \qquad r^p + r^{p+1} + \dots + r^n = \frac{r^p - r^{n+1}}{1-r}$$

On en déduit le critère de convergence d'une série géométrique :

PROPOSITION. *Une série géométrique de raison* $r \in \mathbb{C}$ *converge* $\iff |r| < 1$.

En particulier, $\sum_{n\geqslant 0} r^n = \frac{1}{1-r}(\heartsuit)$.

REMARQUE 2. *Cela se généralise aussi à certaines algèbres.*

REMARQUE 3. *En cas de convergence, on observe que le reste d'une série géométrique est encore une suite géométrique, de même raison :* $R_n = \frac{r^{n+1}}{1-r}$. *La **vitesse de convergence** est aussi géométrique.*

Séries de Riemann

Ce sont les séries de terme général $\frac{1}{n^s}$, où $s \in \mathbb{R}_+$ est fixé.

PROPOSITION. *La série* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^s}$ *converge si et seulement si* $s > 1$.

On démontre ce critère important en majorant ou minorant les sommes partielles par une intégrale :

- Si $s > 1$, on a $u_n = \frac{1}{n^s} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^s}$ d'où $s'_n = u_2 + \dots + u_n \leqslant \int_1^n \frac{dt}{t^s} \leqslant \frac{1}{s-1}$ On en déduit la convergence de la série.
- Si $s \leqslant 1$, on fait le contraire :
  $u_n = \frac{1}{n^s} \geqslant \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^s}$ d'où $s_n = u_1 + \dots + u_n \geqslant \int_1^{n+1} \frac{dt}{t^s} \geqslant \int_1^n \frac{dt}{t} = \ln n$ qui tend vers $+\infty$, donc s_n n'est pas bornée et la série diverge.

REMARQUE 4. *Ce théorème contient la divergence de la série harmonique.*

EXERCICE 7. *Adapter les calculs de la démonstration pour démontrer que*

$$1+\frac{1}{2}+\ldots\frac{1}{n}\sim\ln n$$

On va généraliser cette démonstration et en faire un outil d'étude des séries :

2.1.3 Comparaison d'une série et d'une intégrale

Il arrive très souvent que la suite (u_n) puisse se « prolonger » aux réels, *ie* on a $u_n = f(n)$ où f est définie en fait sur $]0,+\infty[$ (au moins). C'est le cas pour les séries de RIEMANN, et plus généralement quand u_n est fonction explicite de n.

Il est naturel de s'interroger sur le rapport entre les deux façons de « sommer » : $\sum f(n)$ et $\int f(t)\,dt$. Comme souvent, il n'y a pas de lien dans le cas général mais un théorème utile dans un cas particulier.

Exemples :

— La série $\left(\sum \sin(n\pi)\right)$ converge ; l'intégrale $\int_0^\infty \sin(t)\,dt$ diverge.

— La série $(\sum \frac{1}{n^3})$ converge, et de plus $\sum_{n\geqslant p}\frac{1}{n^3}\sim\frac{1}{2p^2}\sim\int_p^\infty\frac{dt}{t^3}$

THÉORÈME 2. *Soit f une fonction continue par morceaux, positive, décroissante sur $[0,+\infty[$. Alors on a la convergence de la série de terme général*

$$w_n=\int_{n-1}^{n} f(t)\,dt-f(n)$$

***En particulier, dans ces hypothèses, la série** $(\sum f(n))$ **converge si et seulement si** f **est intégrable sur** $[0,+\infty[$.*

REMARQUE 5. *Même si f n'est pas définie en 0, cela marche quand même quitte à décaler les suites d'un indice ou deux, ce qui ne change pas la convergence.*

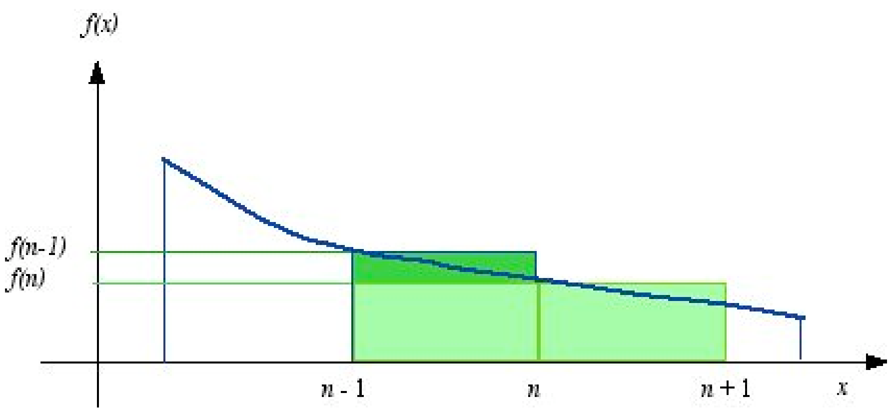

FIGURE 1 – encadrer le terme général

Démonstration. Tout tient dans la remarque suivante : entre $n-1$ et n, f reste comprise entre $f(n)$ et $f(n-1)$. En conséquence, on a

$$0\leqslant w_n\leqslant f(n-1)-f(n)$$

Graphiquement, cela signifie que l'aire de la courbe sur ce segment est comprise entre deux rectangles (cf. figure).
Analytiquement, $\left(\sum (f(n-1)-f(n))\right)$ converge puisque f converge en $+\infty$. Donc $(\sum w_n)$ converge [2] ; noter que pour l'instant il n'y a aucune raison pour que f tende vers 0 !
Les convergences des séries $(\sum \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt)$ et $(\sum f(n))$ sont donc équivalentes. Il n'est pas toujours vrai que la convergence de la première soit équivalente à la convergence de $\displaystyle\int_0^{\infty} f(t)\,dt$, comme le montre un exemple ci-dessus ($\int \sin$). C'est néanmoins vrai dans les hypothèses de ce théorème ($f \geqslant 0$) :

— Si l'intégrale converge, c'est vers $\lim \displaystyle\int_0^n f(t)\,dt$ et donc la série converge.

— Réciproquement, si $\displaystyle\int_0^n f(t)\,dt \to \ell$ alors c'est que la fonction *croissante* $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ reste bornée (par ℓ), et donc converge (forcément vers ℓ).

Ce qui achève la démonstration. ♦

La technique utilisant w_n est d'une grande importance pratique. Elle permet d'encadrer des sommes partielles de la série, même en cas de divergence, et même avec une fonction *croissante*.
En pratique, je vous conseille de TOUJOURS faire le dessin du graphe de f encadré par des rectangles.

EXERCICE 8.

— *À l'aide de cette technique, montrer que* $\dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{2n} \to \ln 2$.

— *Donner un équivalent de* $S_p = \displaystyle\sum_{n=1}^{p} n^{\alpha}$, *pour* $\alpha \in \mathbb{R}$.

---

2. Ces séries s'appellent des séries télescopiques.

UN CAS FAMEUX : LA FORMULE DE STIRLING.

Essayons de trouver un équivalent de $n!$.
Il est naturel de prendre le logarithme, qui fait apparaître une série.
Posons $k_n = \ln n! = 0 + \ln 2 + \cdots + \ln n$. *Le théorème 2 ou plutôt ses techniques permettent d'écrire*

$$n \ \ln n - n = \int_1^n \ln t \, dt \leqslant k_n \leqslant \int_2^{n+1} \ln t \, dt = (n+1)\ln(n+1) - n - 1$$

Malheureusement, il y a encore trop de flou pour conclure : la taille de la fourchette est de l'ordre de $\ln n$. *À ce stade, on peut faire une étude numérique, et conjecturer que*

$$\ln n! \sim (n + 1/2)\ln n - n$$

ce qui est vrai mais ne suffit bien sûr pas à donner un équivalent de $n!$ *: au premier ordre, on n'a que l'équivalence avec* $n \ln n$. *On va (un peu au pif) ≪ viser au milieu ≫ de cette fourchette.*
Considérons donc une fonction plus compliquée que $\ln$, *en remplaçant* k_n *par*

$$s_n = k_n - (n + \frac{1}{2})\ln n + n$$

Alors s_n *est la somme partielle d'une série de terme général*

$$s_n - s_{n-1} = \ln n - (n + \frac{1}{2})\ln n + 1 + (n - \frac{1}{2})\ln(n-1) = 1 + (n - \frac{1}{2})\ln(1 - \frac{1}{n}) \sim \frac{1}{12n^2}$$

Cette série *est convergente (on pourra bientôt estimer son reste, équivalent à* $1/12n$*), ce qui signifie que la* suite (s_n) *converge. En passant à l'exponentielle, on en déduit que* e^{s_n} *converge vers une limite* ℓ *autrement dit que*

$$n! \sim \ell.\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Il faut encore déterminer la constante ℓ*, ce que l'on fait en général grâce aux intégrales de* WALLIS *(exercice). Elles permettent d'établir l'équivalent*

$$I_{2n} = \frac{\pi}{2}\frac{(2n-1)\dots 1}{2n\dots 2} = \frac{\pi}{2}\frac{(2n)!}{4^n.(n!)^2} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$$

d'où en injectant la relation ci-dessus $\ell = \sqrt{2\pi}$.
Finalement, on a démontré la formule de STIRLING *:*

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \ \sqrt{2\pi n}.$$

2.2 Comparaisons des séries à termes positifs

Maintenant qu'on dispose de séries de référence, on peut espérer y comparer une série inconnue.

2.2.1 Théorème de domination

THÉORÈME 3. *Soient* $(u_n), (a_n)$ *des suites de réels* <u>*positifs*</u> *tels que* (a_n) *domine* (u_n), *i.e. que* $(u_n) = O(a_n)$ *: alors la convergence de* $(\sum a_n)$ *entraîne celle de* $(\sum u_n)$.

A fortiori cela reste vrai si $u_n \sim a_n$ ou $u_n = o(a_n)$.
Ne pas négliger la contraposée de ce théorème : la divergence de $(\sum u_n)$ entraîne celle de $(\sum a_n)$.
En pratique on utilise le plus souvent une forme plus faible mais commode car obtenue par des DL :

COROLLAIRE 1. *Si* $u_n \sim v_n$ *sont des termes POSITIFS de séries, alors les deux séries* $(\sum u_n)$ *et* $(\sum v_n)$ *sont de même nature.*

Attention à ne pas écrire d'abominations comme $(\sum u_n) \sim (\sum v_n)$ (ça veut dire quoi????)

Démonstration. On a par hypothèse à partir d'un certain rang n_0 l'existence d'une constante $A > 0$ telle que $u_n \leqslant A.a_n$. On a donc

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n_0} u_k + \sum_{n_0+1}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n_0}(u_k - A.a_k) + A.\sum_{k=0}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=0}^{n_0}(u_k - A.a_k) + A.\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$$

donc toutes les sommes partielles de $(\sum u_n)$ sont majorées par une même constante. ♦

CRITÈRE DE RIEMANN. *En pratique, on va utiliser un critère de comparaison aux séries de* RIEMANN *:*

PROPOSITION. *Si $n^\alpha u_n$ tend vers 0 (ou même reste borné) pour un $\alpha > 1$ alors $(\sum u_n)$ converge.*

Très souvent on utilise $\alpha = 2$ mais il y a des exceptions !

FRACTIONS RATIONNELLES. *Le théorème de domination nous donne*

— *La divergence de* $(\sum \frac{n}{n^2+1})$, *qui domine* $(\sum \frac{1}{n})$.

— *La convergence de* $(\sum \frac{n}{n^3+4n+5})$, *qui est dominée par* $(\sum \frac{1}{n^2})$.

DÉVELOPPEMENT DÉCIMAL ILLIMITÉ. *Un dernier exemple : pour tout réel x on définit son **développement décimal illimité*** de la façon suivante *:*

DÉFINITION 2. *La valeur décimale approchée par défaut à 10^{-n} près de $x \in \mathbb{R}$ est $x_n = 10^{-n}\lfloor c \rfloor$. De même la valeur approchée par excès est $x'_n = x_n + 10^{-n}$, et on a $x_n \leqslant x < x'_n = x_n + 10^{-n}$*

Ainsi, la valeur approchée à 10^{-2} près de π est 3,14 par défaut.
On constate que x_n est la somme partielle d'une série $(x_0 + \sum r_n 10^{-n})$, où les r_n sont des chiffres ($r_n \in \mathbb{N} \cap [0, 9]$). Cette série est convergente et sa somme partielle x_n tend vers x.

2.2.2 Sommation des relations de comparaison

THÉORÈME 4. *Soient deux suites (a_n) et (b_n) de réels **positifs**. On suppose que $(\sum a_n)$ converge (i.e. que la famille (a_n) est sommable) ; alors quand $n_0 \to +\infty$:*

— *Si* $b_n = O(a_n)$, *alors* $(\sum b_n)$ *converge et de plus* $\sum_{n \geqslant N} b_n \underset{N \to +\infty}{=} O(\sum_{n \geqslant N} a_n)$.

— *Si* $b_n = o(a_n)$, *alors* $(\sum b_n)$ *converge et de plus* $\sum_{n \geqslant N} b_n \underset{N \to +\infty}{=} o(\sum_{n \geqslant N} a_n)$.

— *Si* $b_n \sim a_n$, *alors* $(\sum b_n)$ *converge et de plus* $\sum_{n \geqslant N} b_n \underset{N \to +\infty}{\sim} \sum_{n \geqslant N} a_n$.

THÉORÈME 5. *Si au contraire $(\sum a_n)$ diverge, et si $b_n \sim a_n$, d'une part on a la divergence de $(\sum b_n)$, et d'autre part (puisque cette divergence se fait vers $+\infty$) on a l'équivalence cette fois des* sommes partielles *:*

$$\sum_0^N b_n \underset{N \to +\infty}{\sim} \sum_0^N a_n$$

Similairement,

— *Si* $b_n = O(a_n)$, *alors* $\sum_0^N b_n \underset{N \to +\infty}{=} O(\sum_0^N a_n)$.

— *Si* $b_n = o(a_n)$, *alors* $\sum_0^N b_n \underset{N \to +\infty}{=} o(\sum_0^N a_n)$.

Par exemple, on trouve facilement ainsi que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \sim \sum_{k=1}^{n} -\ln(1 - \frac{1}{k}) = \ln n$$

Similairement,

$$\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots = \frac{1}{n}$$

En revanche, ce théorème **tombe** pour des séries à termes non positifs. Par exemple, les séries $\left(\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}\right)$ et $\left(\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + 1}\right)$ sont à termes généraux équivalents mais même pas de même nature (leur différence est une série divergente).

LEMME DE L'ÉCHELLE. *Dans le cas de divergence, on a le joli résultat suivant :*

> **PROPOSITION.** *Si* $u_{n+1} - u_n \to \ell > 0$ *alors* $u_n \sim n\ell$.
>
> *qui se démontre par application du théorème 4 aux séries à termes positifs équivalents* $(\sum (u_{n+1} - u_n))$ *et* $(\sum \ell)$ *! C'est équivalent au lemme de Césaro.*

EXERCICE 9. *On prend* $u_0 \in]0, \pi[$ *et* $u_{n+1} = \sin u_n$.

> *Montrer que* $u_n \to 0$, *puis en appliquant le lemme de l'échelle à* u_n^{-2} *prouver que* $u_n \sim \sqrt{\dfrac{3}{n}}$.

Démonstration. Tout ceci se démontre de façon très semblable au théorème 3. La partie convergence des diverses propriétés est déjà établie par ailleurs, montrons par exemple le point le plus délicat, à savoir que si $b_n \sim a_n > 0$ et si $(\sum a_n)$ diverge alors les sommes partielles sont équivalentes :
notons $t_n = b_0 + \cdots + b_n$ et $s_n = a_0 + \cdots + a_n$. Soit $\varepsilon > 0$ donné, on sait que $a_n \sim b_n$ ie que $a_n - b_n = o(a_n)$ ce qui signifie que pour n plus grand qu'un certain n_0, on aura

$$(1 - \varepsilon)a_n \leqslant b_n \leqslant (1 + \varepsilon)a_n$$

(c'est ici que l'on utilise le signe de a_n et de b_n !!!)
Si l'on pouvait sommer cette relation de 0 à n, ce serait fini ! mais elle n'est vraie que pour $n \geqslant n_0$. N'oublions pas le début de la somme, à savoir s_{n_0} et t_{n_0}.
Sommons là où on en a le droit : il vient (pour $n \geqslant n_0$)

$$(1 - \varepsilon) \sum_{k=n_0+1}^{n} a_n \leqslant \sum_{k=n_0+1}^{n} b_n \leqslant (1 + \varepsilon) \sum_{k=n_0+1}^{n} a_n$$

ce qu'on peut encore écrire

$$(1 - \varepsilon)(s_n - s_{n_0}) \leqslant (t_n - t_{n_0}) \leqslant (1 + \varepsilon)(s_n - s_{n_0})$$

On veut démontrer que $s_n \sim t_n$, ce qui équivaut dans le contexte à montrer que $t_n/s_n \to 1$ (comme $s_n \to +\infty$, on a bien le droit de diviser par s_n). Faisons apparaître cette quantité :

$$(1 - \varepsilon)(1 - \frac{s_{n_0}}{s_n}) \leqslant \frac{t_n}{s_n} - \frac{t_{n_0}}{s_n} \leqslant (1 + \varepsilon)(1 - \frac{s_{n_0}}{s_n}) \leqslant 1 + \varepsilon$$

On va maintenant utiliser le fait que $s_n \to +\infty$, alors que les quantités indicées par n_0 sont fixes : donc (par exemple) s_{n_0}/s_n tend vers 0, donc est inférieur à ε pour n assez grand.
Avec un peu d'élagage, on trouve que pour n suffisamment grand,

$$1 - 2\varepsilon \leqslant (1 - \varepsilon)^2 \leqslant \frac{t_n}{s_n} \leqslant 1 + 2\varepsilon$$

Ceci étant vrai pour ε arbitrairement petit, prouve bien que t_n/s_n tend vers 1. ♦

DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE DE LA SÉRIE HARMONIQUE.

On a subodoré, ou prouvé, que $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots \frac{1}{n} \sim \ln n$. *Étudions* $s_n = H_n - \ln n = 1 + \frac{1}{2} + \dots \frac{1}{n} - \ln n$ *: un procédé fréquent consiste à considérer* s_n *comme la somme partielle d'une série* $\sum u_n$*, où*

$$u_n = s_n - s_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln(n-1) - \ln n = \frac{1}{n} + \ln\big(1 - \frac{1}{n}\big) \sim -\frac{1}{2n^2}$$

Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs équivalents, $(\sum u_n)$ *converge. On en déduit un premier résultat :*

$$\boxed{\text{Il existe un réel } \gamma \text{ (constante d'EULER) tel que } H_n = \ln n + \gamma + o(1)}$$

Numériquement, $\gamma \approx 0,5772156649015328606\dots$

De plus, on a vu que $\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots \sim \frac{1}{n}$*, d'où*

$$\sum_{n>N} -u_n = \sum_{n>N} (s_{n-1} - s_n) = s_N - \lim_{n\to\infty} s_n = H_N - \ln N - \gamma \sim \frac{1}{2N}$$

ce qui prouve que $\boxed{H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o(1/n)}$

Bien sûr, on peut itérer la manœuvre, en développant $u_n + \frac{1}{2n^2}$*, etc...*

2.3 Règle de d'Alembert

On a la recette très pratique et souvent mal employée :

PROPOSITION (RÈGLE DE D'ALEMBERT). *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite strictement positive et si la suite annexe* $r_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ *tend vers une limite* ℓ *alors :*

— *Si* $0 \leqslant \ell < 1$*, la série* $(\sum u_n)$ *converge.*
— *si* $\ell > 1$*, la série* $(\sum u_n)$ *diverge.*
— *Si* $\ell = 1$*, tout peut arriver (ex : séries de Riemann).*

Démonstration. En effet, si $\ell < 1$ on prend $k \in]\ell, 1[$: à partir d'un certain rang N on aura $r_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant k$. Par produit du rang N au rang $n-1$, on trouve $u_n \leqslant u_N.k^{n-N}$, on a dominé par le terme général d'une série géométrique convergente ce qui prouve que $\big(\sum u_n\big)$ converge.
De même dans l'autre sens. ♦

Il est très important de se souvenir que cette condition est suffisante, **mais pas nécessaire** : exemple $u_n = (3+(-1)^n)^{-n}$. Elle ne marche en fait que si l'on a une convergence ≪ presque ≫ comme une série géométrique.

EXERCICE 10. *Montrer que si* $r_n \to \ell < 1$ *alors il existe* $k < 1$ *tel que le reste* $R_n = \sum_{p=n+1}^{\infty} u_p$ *soit dominé par* k^n *(la vitesse de convergence est géométrique).*

EXERCICE 11. *Si on pose* $u_n = \frac{1.3\dots(2n-1)}{2.4\dots.(2n)}$*, il vient* $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1$*. Peut-on conclure par la règle ?*
Certes pas, car la **limite** *du rapport n'est plus* < 1 *(c'est 1 !)*
En revanche, si on pose $v_n = 1/u_n$*, alors la croissance de la suite* (v_n) *entraine la divergence de* $(\sum v_n)$*. Pourquoi ?*

UNE SÉRIE ENTIÈRE. *La série* $\sum \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!}$ *converge, pour tout* $a \geqslant 0$*. Comme on le verra très bientôt, on peut étendre partiellement tous ces critères à des séries à termes non forcément positifs.*

Remarque : ne pas confondre avec le **théorème** de D'ALEMBERT !
Le critère de D'ALEMBERT ne marche qu'avec des séries que l'on peut classer dans l'échelle des séries géométriques. Il sera donc très utile pour des séries avec des termes en x^n, dites séries entières. C'est déjà

bien, mais il y a de nombreux cas où il ne peut s'appliquer. À défaut on pourra comparer à des séries plus fines, comme celles de RIEMANN.

2.4 Théorème des séries alternées

Nous nous donnons un seul théorème dans un cas très particulier de séries à termes non positifs.

DÉFINITION 3. *Une série de la forme* $(\sum(-1)^n u_n)$ *avec* $u_n \geqslant 0$, *est dite alternée.*

Bien entendu, on pourrait décaler les signes d'un cran sans embarras. Une définition plus générale mais moins pratique serait $\forall n \; u_n u_{n+1} < 0$.
Ex : $1 - 1 + 2 - 6 + 24 + \ldots + (-1)^n n! + \ldots$. Celle-ci est grossièrement divergente. De même pour la célèbre $(\sum(-1)^n)$.

THÉORÈME DES SÉRIES ALTERNÉES.

Si une série alternée $(\sum(-1)^n u_n)$ *vérifie de plus [critère spécial] :*
- *La valeur absolue du terme général,* u_n, *décroît ;*
- $u_n \to 0$ *;*

alors la série converge.
De plus, le reste de la série est majoré par « le premier terme négligé »(= le premier terme de ce reste), et il a son signe, c'est à dire que

$$\left|\sum_{k\geqslant n}(-1)^k u_k\right| \leqslant |(-1)^n u_n| = u_n \qquad (-1)^n R_{n-1} > 0$$

Ce qui démontre par exemple la convergence de la série harmonique alternée, et plus généralement celle de toute série de la forme $(\sum(-1)^n \frac{1}{n^b})$, avec $b > 0$.
On utilise ce théorème
- Pour établir la convergence d'une série alternée, bien sûr, ou encore
- pour majorer le reste (sachant déjà la série convergente).

Démonstration. Pour $(\sum(-1)^n u_n)$, on introduit les sous-suites paires et impaires de $s_n = u_0 - u_1 + \ldots + (-1)^n u_n$:

$$a_n = s_{2n} = u_0 - u_1 + u_2 - \cdots + u_{2n} \qquad b_n = s_{2n+1} = u_0 - u_1 + u_2 - \cdots - u_{2n+1} = a_n - u_{2n+1}$$

Elles sont adjacentes, en effet :
- $b_n \nearrow$, et $a_n \searrow$ (on a $b_n - b_{n-1} = u_{2n} - u_{2n+1} \geqslant 0$, idem pour a_n)
- $a_n - b_n = u_{2n+1} \to 0$

Donc elles convergent, vers une même limite, et par un résultat classique (s_n) aussi. ♦

Exemple : pour tout $x \in [0, 1]$,la série $(\sum(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1})$ est alternée, et converge car les hypothèses sont vérifiées. De plus, si on note $f(x)$ sa somme on a

$$|f(x) - \sum_{n=0}^{N}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}| \leqslant \frac{x^{2N+3}}{2N+3} \leqslant \frac{1}{2N+3}$$

On verra dans le cours sur les séries de fonctions que cela prouve la convergence *uniforme* de la série vers f sur $[0, 1]$.

EXERCICE 12. *Montrer que* $s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n+1}$ *converge grâce au théorème 6, puis que sa limite est* $\ln 2$, *puis que la série de terme général* $\ln 2 - s_n$ *converge (on pourra observer que* $\int_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{n+1}$*).*

Une autre forme de la seconde partie de la conclusion : la somme de la série a le **signe** du premier terme.

3 Convergence absolue

Les armes que nous avons trouvées dans les cas très particuliers des séries à termes positifs vont maintenant nous servir dans un contexte plus général.

3.1 Critère de convergence absolue

3.1.1 Le théorème fondamental

Commençons par la

DÉFINITION 4. *Une série numérique* $\left(\sum u_n\right)$ *est* absolument convergente *quand* $\left(\sum |u_n|\right)$ *converge (dans* $\mathbb{R}_+$*).*
Plus généralement, une série d'un espace vectoriel normé est absolument convergente quand $\left(\sum \|u_n\|\right)$ *converge.*

On a donc transféré un problème — la convergence de la série — dans $\mathbb{R}_+$. Cela est efficace :

THÉORÈME 7. *Dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*, et même dans tout evn de dimension finie, toute série absolument convergente est convergente.*

L'importance pratique de ce théorème est considérable.

Démonstration. Vue en sup : on décompose $u_n = u_n^+ - u_n^-$ en différence de deux suites positives[3], avec $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$. Comme u_n^+ et u_n^- sont majorées par $|u_n|$, on a donc par comparaison les deux séries de réels positifs $\left(\sum u_n^+\right)$ et $\left(\sum u_n^-\right)$ qui convergent, et donc leur différence $\left(\sum u_n\right)$ converge.
Dans un espace vectoriel de dimension finie, on montre que les séries des coordonnées $k^{\text{èmes}}$ *convergent car* $|(u_n)_k| \leqslant \|u_n\|$ *et on en déduit par linéarité que la série vectorielle converge.* ♦

Remarquons que (par passage à la limite des sommes partielles) on a pour toute série absolument convergente

$$\Big|\sum_{n\geqslant 0} u_n\Big| \leqslant \sum_{n\geqslant 0} |u_n|$$

REMARQUE 6. *Ce n'est pas une raison pour travailler sur la* quantité $\Big|\sum_{n\geqslant 0} u_n\Big|$ *avant d'avoir démontré qu'elle a un sens ! par exemple, la série* $\sum(-1)^n$ *est bornée (toute somme partielle vérifie* $\Big|\sum_{0\leqslant n\leqslant N} u_n\Big| \leqslant 1$*) mais cela ne la rend pas convergente.*

On est ramené par ce théorème au cas des séries à termes réels positifs, qui est substantiellement plus simple. On peut paraphraser alors les théorèmes de convergence, *en gardant toujours la condition de positivité pour la série de comparaison* :

PROPOSITION. *Soit* (u_n) *une suite à valeurs dans* E*, dominée par la suite réelle* positive a_n*, ie on a* $|u_n| = O(a_n)$*. Alors la convergence de* $\sum a_n$ *entraîne celle de* $\sum u_n$*.*

Pratiquement, on utilise souvent le critère de RIEMANN (étude de $n^\alpha u_n$).

PROPOSITION (CRITÈRE DE D'ALEMBERT, LE RETOUR).
Si la suite de terme général $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$ *est bien définie (à partir d'un certain rang) et converge vers une limite* ℓ*, alors la série* $\sum u_n$
- *converge dès que* $\ell < 1$
- *diverge (grossièrement) dès que* $\ell > 1$*.*

La morale de ce critère (de convergence absolue) est la suivante : la première chose à faire pour tester la convergence d'une série donnée est d'essayer de **majorer la valeur absolue (norme) du terme général**.
Nous n'avons pas fini d'entendre cette antienne !
Concrètement, on essaye de trouver $a_n \geqslant 0$, suite connue, telle que $|u_n| \leqslant a_n$ ou $|u_n| = O(a_n)$ ou $u_n \sim a_n$, avec $\left(\sum a_n\right)$ qui converge.
Si cela ne marche pas, il est temps d'essayer d'autres méthodes (par exemple, voir si le théorème des séries alternées ne s'appliquerait pas).

3. L'une des deux vaut 0, en fonction du signe de u_n.

LA SÉRIE EXPONENTIELLE DANS $\mathbb{C}$.

La série $(\sum \frac{z^n}{n!})$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ (absolument). Sa somme est par définition l'exponentielle de z :

$$e^z = \exp(z) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$$

Démonstration immédiate par D'ALEMBERT. On verra que pour tous $a, b \in \mathbb{C} \quad e^{a+b} = e^a.e^b$ ce qui mène vers la notation d'EULER $z = r.e^{it}$. Mais on utilisera aussi, notamment pour les systèmes différentiels linéaires, l'exponentielle d'un endomorphisme (dans l'algèbre $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$) ou de sa matrice ($\mathcal{A} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

REMARQUE 7. *Tout ceci est encore vrai dans un espace vectoriel normé de dimension finie (en fait, dans un* BANACH*, hors-programme).*

3.2 Un exemple difficile

On désire connaître la nature de la série $\left(\sum \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}\right)$.
On peut essayer numériquement... qu'en pensez-vous ?

1. Montrer que la série de terme général $\int_n n + 1 f(t)\,dt - f(n)$, où on a posé $f(n) = \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}$ pour $n > 0$, est encore convergente.

   Pour cela on pourra observer que $|f(t) - f(n)| \leqslant \operatorname*{Sup}_{[n,n+1]} |f'| \leqslant \frac{3}{2n\sqrt{n}} = O(1/n^{3/2})$.

2. Montrer que $\int_0^n \frac{\sin(\sqrt{t})}{t}\,dt = 2\int_0^{n^2} \frac{\sin x}{x}\,dx$. On prouvera ultérieurement que cette dernière intervalle converge quand $n \to +\infty$ (vers π, incidemment).
3. Conclure !